# Cálculo de raízes quadradas de grafos utilizando um resolvedor pseudo-booleano

**Pietro Cavassin, Aleffer Rocha e Renato Carmo**
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Informática

pietro.polinari@gmail.com, arocha@inf.ufpr.br, renato.carmo.rc@gmail.com

**WPCCG 2021**
Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais

## Quadrado de grafos

O *quadrado de um grafo* $H$ é o grafo $H^2$ dado por $V(H^2) = V(H)$ e $E(H^2) = \{uv\colon\ d_H(u,v) \le 2\}$. Dizemos então que $H$ é uma *raiz quadrada* de $H^2$ (veja a Figura 1).

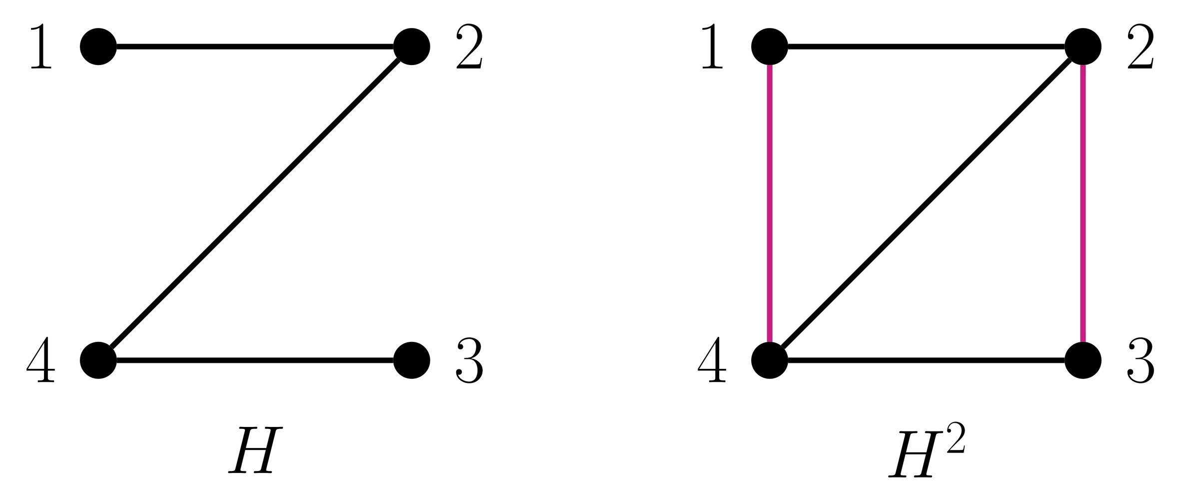


**Figura 1.** Grafos $H$ e $H^2$ com arestas de $E(H^2) - E(H)$ destacadas

Existem grafos com nenhuma, uma ou mais de uma raiz quadrada. Determinar se um grafo tem raiz quadrada é um problema $\mathcal{NP}$-completo [3] que pode ser reduzido ao problema de Satisfazibilidade Booleana [2].

## Redução a satisfazibilidade booleana

Se $H$ é raiz quadrada de $G$, então $M_G = M_H + M_H^2$, onde $M_G$ e $M_H$ são suas respectivas matrizes de adjacência e as operações são booleanas. Essa igualdade define uma instância do problema de Satisfazibilidade Booleana: cada restrição corresponde a uma aresta de $G$ e cada variável corresponde a uma aresta de $H$.

Usando como exemplo os grafos da Figura 1, e fazendo $G = H^2$, temos

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_H = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}.$$

E a igualdade $M_G = M_H + M_H^2$ corresponde ao seguinte sistema de equações pseudo-booleanas.

$$\begin{cases} x_{12} + x_{23}\,x_{13} + x_{24}\,x_{14} \ge 1 \\ x_{13} + x_{23}\,x_{12} + x_{34}\,x_{14} = 0 \\ x_{14} + x_{24}\,x_{12} + x_{34}\,x_{13} \ge 1 \\ x_{23} + x_{13}\,x_{12} + x_{34}\,x_{24} \ge 1 \\ x_{24} + x_{14}\,x_{12} + x_{34}\,x_{23} \ge 1 \\ x_{34} + x_{14}\,x_{13} + x_{24}\,x_{23} \ge 1 \end{cases} \tag{1}$$

Podemos adicionar a (1) uma restrição impondo que $|E(H)| \le |E(G)|$. Além disso, se $G$ é conexo podemos também impor que $|E(H)| \ge |V(G)| - 1$. No nosso exemplo teríamos então as seguintes restrições adicionais.

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34} \le 5$$
$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34} \ge 3$$

## Objetivo do trabalho

Um sistema como o acima pode ser resolvido por um resolvedor pseudo-booleano como o SCIP [1]. Nosso objetivo é avaliar o impacto computacional de pré-processar o sistema diminuindo o número de variáveis e equações.

Ainda usando como referência o sistema acima, observe que as posições nulas em $M_G$ determinam que as correspondentes posições de $M_H$ também sejam nulas. Usando este fato o sistema fica reduzido ao seguinte.

$$\begin{cases} x_{12} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34} \le 5 \\ x_{12} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34} \ge 3 \\ x_{12} + x_{24}\,x_{14} \ge 1 \\ x_{23}\,x_{12} + x_{34}\,x_{14} = 0 \\ x_{14} + x_{24}\,x_{12} \ge 1 \\ x_{23} + x_{34}\,x_{24} \ge 1 \\ x_{24} + x_{14}\,x_{12} + x_{34}\,x_{23} \ge 1 \\ x_{34} + x_{24}\,x_{23} \ge 1 \end{cases}$$

## Referências

[1] Gerald Gamrath, Daniel Anderson, Ksenia Bestuzheva, Wei-Kun Chen, Leon Eifler, Maxime Gasse, Patrick Gemander, Ambros Gleixner, Leona Gottwald, Katrin Halbig, Gregor Hendel, Christopher Hojny, Thorsten Koch, Pierre Le Bodic, Stephen J. Maher, Frederic Matter, Matthias Miltenberger, Erik Mühmer, Benjamin Müller, Marc E. Pfetsch, Franziska Schlösser, Felipe Serrano, Yuji Shinano, Christine Tawfik, Stefan Vigerske, Fabian Wegscheider, Dieter Weninger, and Jakob Witzig. The SCIP Optimization Suite 7.0. ZIB-Report 20-10, Zuse Institute Berlin, March 2020.

[2] Peter L Hammer and Sergiu Rudeanu. Pseudo-boolean programming. *Operations Research*, 17(2):233–261, 1969.

[3] Rajeev Motwani and Madhu Sudan. Computing roots of graphs is hard. *Discrete Applied Mathematics*, 54(1):81–88, 1994.