Coloração de Arestas em Grafos Split Proibidos para Comparabilidade e Intervalos

Cintia I. Cararo[1,4], Sheila M. Almeida[1,5], Cândida N. Silva[2,6] e Glasielly D. Proença[3,7]

WPCCG 2021
Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais

Introdução

Dado um grafo G, uma *coloração de arestas* de G é uma atribuição de cores para as arestas de G tal que arestas adjacentes têm cores distintas. A Figura 1 apresenta uma coloração de arestas.

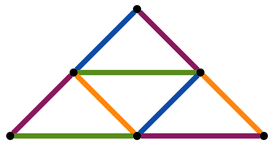


Figura 1: Coloração de arestas para o grafo Sol

O *Problema da Coloração de Arestas* é determinar o menor número de cores k para o qual G tem uma coloração de arestas. Esse número é chamado de *índice cromático de* G e denotado por $\chi'(G)$. Por definição, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo do grafo. Vizing (1964) mostrou que, para qualquer grafo G, $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$. Contudo, decidir se $\chi'(G) = \Delta(G)$ é um problema $\mathcal{NP}$-Completo (Holyer, 1981). Por outro lado, se G é *sobrecarregado*, isto é, se $|E(G)| > \Delta(G)\lfloor |V(G)|/2 \rfloor$, necessariamente $\chi'(G) = \Delta(G)+1$. Quando o grafo G contém um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é sobrecarregado, então G é *subgrafo-sobrecarregado* e também $\chi'(G) = \Delta(G)+1$.

Grafos split

Um grafo G é *split* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos, Q e S, tais que todo par de vértices de Q são adjacentes e de S são não adjacentes. A Figura 2 apresenta um grafo split com $|Q| = 5$ e $|S| = 8$.

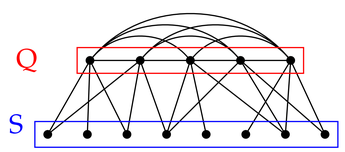


Figura 2: Grafo split

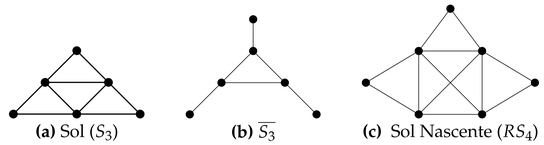
O Problema da Coloração de arestas possui resultados parciais quando restrito aos grafos split, como os Teoremas 1 e 4.

Teorema 1: Chen et al. (1995)
Se G é um grafo split com $\Delta(G)$ ímpar, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

O Teorema 4 estabelece o índice cromático dos grafos split-intervalos e split-comparabilidade. Ambas subclasses têm uma caracterização por subgrafos proibidos, apresentadas a seguir.

Grafos split-intervalos e split-comparabilidade

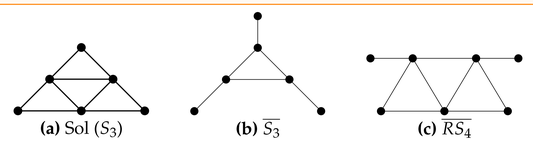
Teorema 2: Foldes e Hammer (1977)
Um grafo split G é um grafo de intervalos se, e somente se, não contém como subgrafo induzido os ilustrados na Figura 3.



(a) Sol (S_3) **(b)** $\overline{S_3}$ **(c)** Sol Nascente (RS_4)

Figura 3: Subgrafos proibidos split-intervalos

Teorema 3: Foldes e Hammer (1977)
Um grafo split G é um grafo de comparabilidade se, e somente se, não contém como subgrafo induzido os apresentados na Figura 4.



(a) Sol (S_3) **(b)** $\overline{S_3}$ **(c)** $\overline{RS_4}$

Figura 4: Subgrafos proibidos para split-comparabilidade

Teorema 4: Gonzaga (2021)
Seja G um grafo split-intervalos ou split-comparabilidade. Então, $\chi'(G) = \Delta(G)+1$ se, e somente se, G é subgrafo-sobrecarregado.

Conjectura-se que qualquer grafo split G tenha $\chi'(G) = \Delta(G)+1$ se, e somente se, G é subgrafo-sobrecarregado (Figueiredo et al., 2000).

Proposta de trabalho

Nesse trabalho investigamos o Problema da Coloração de Arestas nos grafos split com grau máximo par que contém o Sol, ou seu complemento, ou contém o Sol nascente e seu complemento, isto é, que não são split-intervalos nem split-comparabilidade.

O grafo G da Figura 5 tem $\Delta(G) = 12$ e contém um Sol como subgrafo induzido (em destaque). Logo G não é de comparabilidade nem de intervalos e é um exemplo de grafo estudado nesse projeto.

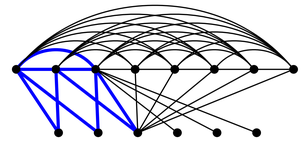


Figura 5: Grafo split com Sol induzido

Referências

Chen, B. L., H. L. Fu, e M. T. Ko. 1995. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 3(1):137–146.

Figueiredo, C. M. H., J. Meidanis, e C. P. de Mello. 2000. Local conditions for edge-coloring. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 32:79–92.

Foldes, S., e P. L. Hammer. 1977. Split Graphs Having Dilworth Number Two. *Canadian Journal of Mathematics* 29(3):666–672. doi: 10.4153/CJM-1977-069-1.

Gonzaga, L. G. da S. 2021. *Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade e Split-Intervalos*. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa.

Holyer, I. 1981. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing* 10(4):718–720.

Vizing, V. G. 1964. On an estimate of the chromatic class of a $p-$graph. *Discret Analiz* 3:25–30.

Agradecimentos

CAPES CNPq

[1]Universidade Tecnológica Federal do Paraná; [2]Universidade Federal de São Carlos; [3]Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
[4]cintiacararo@alunos.utfpr.edu.br; [5]sheilaalmeida@utfpr.edu.br; [6]candida@ufscar.br; [7]glasielly.proenca@ufms.br