Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais 2021

Evidências para a Conjectura de Hougardy

Felipe Eduardo Pizzi[1,2], Juliano Silva do Nascimento[1,3] e Sheila Morais de Almeida[1,4]

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS PONTA GROSSA

Coloração de Vértices

O *Problema da Coloração de Vértices* é determinar, para um dado grafo G, o número mínimo de cores para se obter uma coloração de vértices onde quaisquer dois vértices adjacentes têm cores diferentes. Esse número é chamado de *número cromático* e representado por $\chi(G)$. A Figura 1 apresenta exemplos de coloração de vértices.

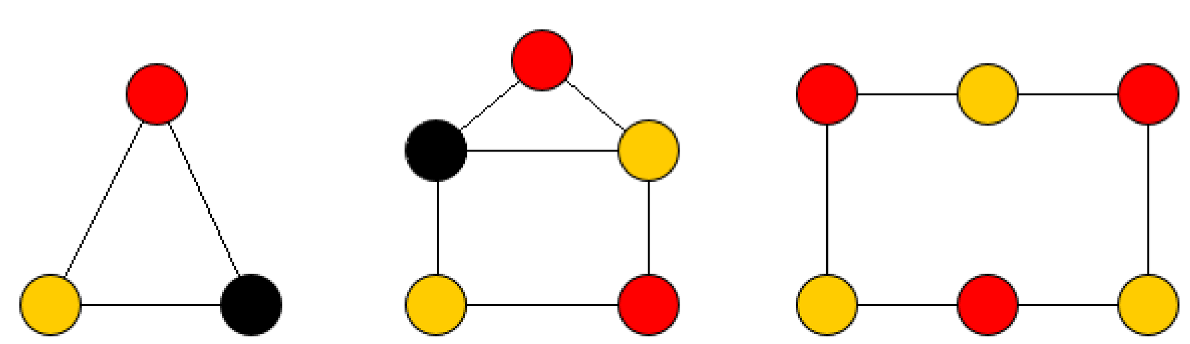

Figura 1: Exemplos de grafos perfeitos

Teorema (Karp, 1972)
Dado um grafo G e um número natural k, decidir se $\chi(G) \leq k$ é um problema NP-completo.

Grafos Perfeitos

Para qualquer grafo G, tem-se $\chi(G) \geq \omega(G)$, onde $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G. Um grafo G é *perfeito* se e, somente se, todo subgrafo induzido H de G tem $\chi(H) = \omega(H)$. Os grafos da Figura 1 são perfeitos.

Teorema (Lovász, 1972)
Um grafo é perfeito se e somente se seu complemento é perfeito.

Teorema Forte dos Grafos Perfeitos (Chudnovsky et al., 2006)
Um grafo G é perfeito se, e somente se, G e $\overline{G}$ são livres de C_n e $\overline{C_n}$, para $n \geq 5$ ímpar.

Uma *dupla-par* em um grafo G é um par de vértices não adjacentes tais que todos os caminhos induzidos entre eles têm comprimento par. Contrair dois vértices u e v é removê-los, e incluir um novo vértice w adjacente a todos os vizinhos de u e de v. A Figura 2 apresenta uma sequência de contrações de duplas pares.

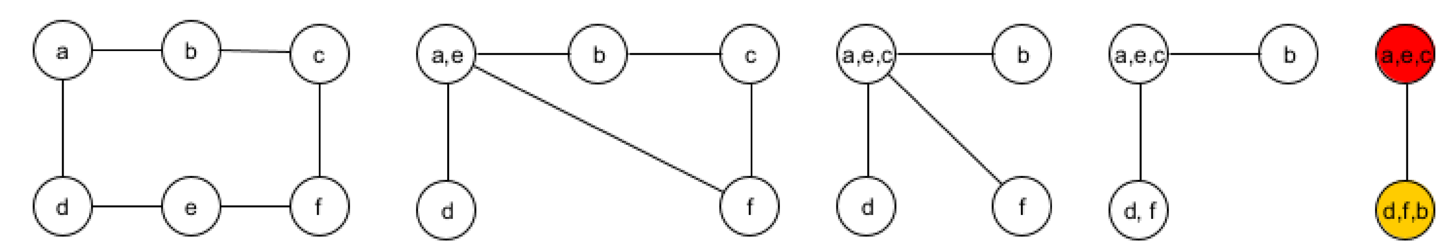

Figura 2: Sequência de contrações de duplas pares para o C_6

Se um grafo admite contrações de duplas pares até convergir para um grafo completo, então é possível colorir seus vértices atribuindo-se uma cor para cada vértice do grafo resultante e mantendo a mesma cor para os vértices do grafo original. A coloração do C_6 na Figura 1 foi obtida por esta técnica (vejas as contrações na Figura 2.

Conjectura de Hougardy

Um grafo G é *quasi-paridade estrita (SQP)* se G e cada subgrafo induzido de G é completo ou possui uma dupla-par. A Figura 3 mostra exemplos de grafos SQP. Os grafos SQP admitem uma coloração de vértices por contração de duplas pares.

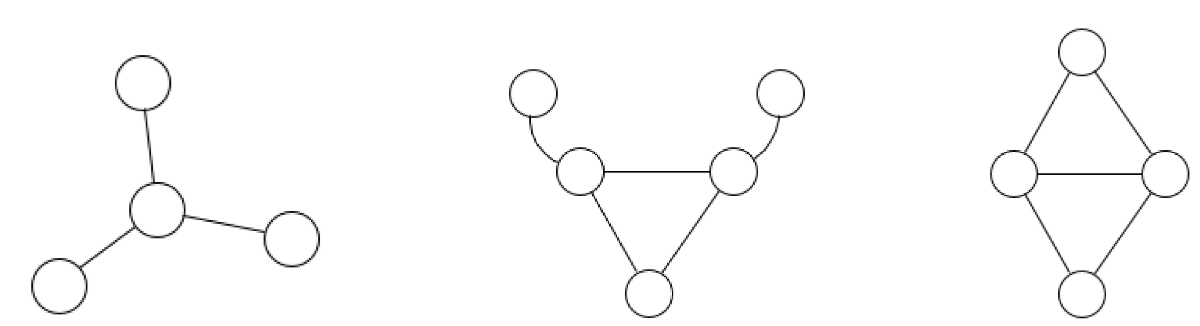

Figura 3: Grafos SQP: garra, touro e diamante

Conjectura (Hougardy, 1995)
Se um grafo G é minimal não SQP, então G é um ciclo ímpar ou um complemento de um ciclo ímpar ou um grafo linha de bipartido.

A Conjectura de Hougardy é verdadeira para os grafos livres de garras (Sales and Maffray, 1998), livres de diamante (Kézdy and Scobee, 2001), livres de touro (de Figueiredo et al., 2006), e planares (Sales et al., 2008).

Objetivo

Um grafo G é *probe livre de diamante* se $V(G)$ pode ser particionado em P e N, tal que N é um conjunto independente e a adição de arestas entre vértices de N resulta em um grafo livre de diamante. O grafos livres de diamante são subclasse dos probes livres de diamante. E os grafos livres de touro são subclasse dos grafos livres de S_3, $\overline{S_3}$ e S_4 (veja a Figura 4). O objetivo deste projeto de pesquisa é investigar a Conjectura de Hougardy restrita aos probes livres de diamante e aos livres de S_3, $\overline{S_3}$ e S_4.

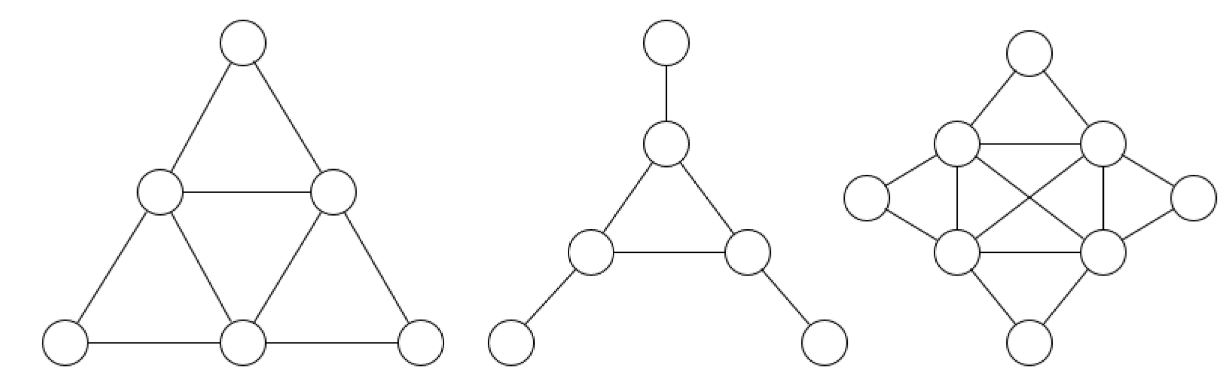

Figura 4: Grafos S_3, $\overline{S_3}$ e S_4

Referências

Chudnovsky, Maria, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. 2006. The strong perfect graph theorem. *Annals of mathematics* 51–229.

de Figueiredo, Celina M. H., Frédéric Maffray, and Claudia Regina Villela Maciel. 2006. Even pairs in bull-reducible graphs. In *graph theory in paris*, 179–195. Springer.

Hougardy, Stefan. 1995. Even and odd pairs in linegraphs of bipartite graphs. *European Journal of Combinatorics* 16(1):17–21.

Karp, Richard M. 1972. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*, 85–103. Springer.

Kézdy, André E., and Matthew Scobee. 2001. A proof of hougardy's conjecture for diamond-free graphs. *Discrete Mathematics* 240(1-3):83–95.

Lovász, L. 1972. A characterization of perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 13(2):95–98. doi:https://doi.org/10.1016/0095-8956(72)90045-7.

Sales, Claudia Linhares, and Frédéric Maffray. 1998. Even pairs in claw-free perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 74(2):169–191.

Sales, Cláudia Linhares, Frédéric Maffray, and Bruce Reed. 2008. On planar quasi-parity graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 22(1):329–347.

Este projeto é financiado pelo CNPq (428941/2016-8).

[1]Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Ponta Grossa, Departamento Acadêmico de Informática
[2]felipeeduardo@alunos.utfpr.edu.br; [3]julianon@alunos.utfpr.edu.br; [4]sheilaalmeida@utfpr.edu.br