Criticalidade arco-íris em rodas e leques

Aleffer Rocha[1], **Sheila Morais de Almeida**[1]

[1]Departamento Acadêmico de Informática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Av Monteiro Lobato, s/n - Km 04, CEP 84016-210 - Ponta Grossa - PR – Brasil

aleffer@alunos.utfpr.edu.br, sheilaalmeida@utfpr.edu.br

Resumo. *Uma coloração arco-íris de um grafo conexo G é uma coloração de arestas, não necessariamente própria, tal que entre qualquer par de vértices de G existe um caminho cujas cores das arestas são duas a duas distintas. O número de conexão arco-íris de um grafo G, denotado por $rc(G)$, é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração arco-íris de G. Um grafo G é arco-íris crítico se a remoção de uma aresta qualquer de G aumenta o seu número de conexão arco-íris. Nesse trabalho, provamos que grafos rodas e leques são arco-íris críticos somente quando esses grafos tem poucos vértices.*

Abstract. *A rainbow coloring of a connected graph G is an edge coloring that is not necessarily proper such that there is a path between any pair of vertices of G whose edge colors are pairwise distinct. The rainbow connection number of a graph G, denoted by $rc(G)$, is the least number of colors for which there is a rainbow coloring of G. A graph G is rainbow critical if its rainbow connection number increases when we remove any edge from G. In this work, we prove wheel and fan graphs are rainbow critical only when these graphs have few vertices.*

Palavras-chave: Grafos arco-íris críticos, grafos rodas, grafos leques

Keywords: Rainbow critical graphs; wheel graphs; fan graphs

1. Introdução

Uma *coloração de arestas* em um grafo G é uma atribuição de cores para as arestas de G. Neste trabalho, representamos as cores através de números inteiros e os grafos considerados são simples e conexos. Os conjuntos de vértices e arestas de qualquer grafo G serão denotados respectivamente por $V(G)$ e $E(G)$. Uma coloração é própria se as arestas incidentes em um mesmo vértice possuem cores distintas. Dado um grafo G com uma coloração de arestas não necessariamente própria, um caminho entre um par de vértices u e v em G é arco-íris se as cores de quaisquer duas arestas do caminho são distintas. Uma coloração de arestas de G é uma coloração arco-íris se entre qualquer par de vértices de G existe um caminho arco-íris [Chartrand et al. 2008]. O *número de conexão arco-íris* de um grafo G é o menor inteiro k possível para se obter uma coloração arco-íris em G com k cores e é denotado por $rc(G)$. O Problema da Coloração Arco-Íris consiste em determinar $rc(G)$ para um grafo G simples e conexo qualquer. É importante ressaltar que se G é desconexo então existe pelo menos um par de vértices, u e v, entre os quais não existe caminho. Portanto, não há cores suficientes para se ter um caminho arco-íris entre u e v, e, consequentemente podemos concluir que o número de conexão arco-íris de G é infinito. O Problema da Coloração Arco-íris é de interesse da Agência de Segurança Nacional (em inglês: *National Security Agency - NSA*), que tem financiado projetos sobre o tema [Lo 2012, Dudek et al. 2015]. Mais detalhes sobre essa aplicação podem ser vistos em [Li and Sun 2012].

Para um k fixo, $k \geq 2$, determinar se o $rc(G) \leq k$ é NP-completo [Chakraborty et al. 2011, Ananth et al. 2011, Li and Li 2011]. Considerando a dificuldade em se calcular o $rc(G)$, diversos autores empreenderam esforços na busca por limitantes inferiores e superiores para o número de conexão arco-íris [Chakraborty et al. 2011, Chandran and Rajendraprasad 2012, Schiermeyer 2009].

Um grafo G é arco-íris crítico se, ao remover uma aresta qualquer de G, o número de conexão arco-íris de G aumenta [Rao and Murali 2014]. Em [Rao and Murali 2014] os autores também mostram que os grafos resultantes do produto cartesiano de dois caminhos, P_m e P_n, são arco-íris críticos quando $m, n \geq 2$ e que o produto cartesiano de ciclos pares com caminhos, C_m e P_n, são arco-íris críticos quando $m \geq 4$ par e $n \geq 2$. Esses resultados foram refutados em [Rocha and Almeida 2017], ficando provado que o produto cartesiano de dois caminhos é arco-íris crítico se, e somente se, $m = 1$ ou $m = n = 2$ e que o produto cartesiano de ciclos com caminhos não é arco-íris crítico. Este trabalho apresenta resultados sobre a criticalidade arco-íris dos grafos rodas e leques.

2. Arcabouço teórico

Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo H de um grafo G é *gerador* se $V(H) = V(G)$. Uma *árvore geradora* de um grafo G é subgrafo gerador de G conexo e sem ciclos. Chartrand et. al [Chartrand et al. 2008] apresentam os primeiros limitantes superiores para o número de conexão arco-íris, explorando a quantidade de arestas presentes nas árvores geradoras do grafo. Como as árvores são grafos conexos, possuem caminho entre quaisquer pares de vértices. Além disso, qualquer subgrafo conexo de um grafo G que contenha $|V(G)|$ vértices tem pelo menos tantas arestas quanto uma árvore geradora de G. Então, para obter uma coloração arco-íris de qualquer grafo simples e conexo, é suficiente atribuir cores distintas para todas as arestas de uma das suas árvores geradoras. Sabe-se que qualquer árvore com n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas. Então, uma coloração arco-íris de uma árvore geradora de um grafo G usa $|V(G)| - 1$ cores. Portanto, $rc(G) \leq |V(G)| - 1$, para qualquer grafo conexo G.

A *distância* entre dois vértices u e v em um grafo G é o número de arestas de um caminho mínimo entre u e v. A *excentricidade* de um vértice v é a maior das distâncias entre v e os demais vértices do grafo G. O *diâmetro* de G, denotado por $diam(G)$, é a maior excentricidade de um vértice de G. Assim como a árvore geradora provê um limitante superior para o $rc(G)$, o diâmetro do grafo provê um limitante inferior [Chartrand et al. 2008]. Note que se existe um par de vértices em G entre os quais não há caminho de tamanho menor que $diam(G)$, não pode haver uma coloração arco-íris para G com menos que $diam(G)$ cores. Logo, $rc(G) \geq diam(G)$, para qualquer grafo G. Pode-se concluir então que, se G é um grafo conexo e não trivial com $|V(G)|$ vértices, então $diam(G) \leq rc(G) \leq |V(G)| - 1$.

Dados dois grafos G e H, o grafo junção $G + H$ tem conjunto de vértices $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G + H) = \{vu : v \in V(G)\, \text{e}\, u \in V(H)\} \cup E(G) \cup E(H)$.

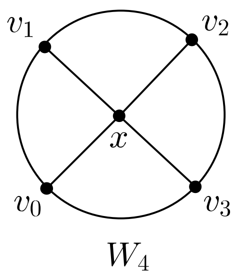
Os primeiros resultados sobre coloração arco-íris foram publicados em [Chartrand et al. 2008] e apresentam o número de conexão arco-íris de árvores, ciclos, grafos completos, rodas, dentre outros. Para um grafo G com n vértices, $rc(G) = n - 1$ se, e somente se, G é uma árvore. O ciclo C_n tem $rc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e o grafo completo K_n tem $rc(K_n) = 1$. Como o número de conexão arco-íris de qualquer grafo é limitado inferiormente por seu diâmetro, não existem grafos além dos completos com número de conexão arco-íris igual a 1.

Nesse trabalho, vamos tratar da criticalidade dos grafos rodas e leques. Um grafo roda, W_n, consiste da junção de um ciclo C_n com um grafo completo K_1, como mostra a Figura 1a. O Teorema 1 apresenta o número de conexão arco-íris dos grafos roda.

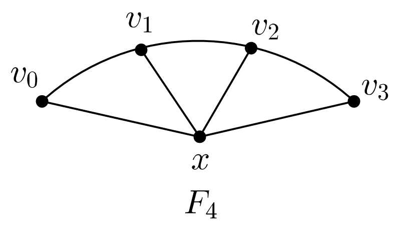
Teorema 1. *[Chartrand et al. 2008] Seja W_n um grafo roda com $n \geq 3$.*

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 3, \\ 2, & se\ 4 \leq n \leq 6, \\ 3, & se\ n \geq 7. \end{cases}$$

Considere o grafo roda $W_n = C_n + K_1$ e sejam os vértices de C_n rotulados $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ tal que v_i é adjacente a $v_{(i+1) \bmod n}$, $0 \leq i \leq n - 1$. O grafo leque F_n é obtido pela remoção da aresta v_0v_{n-1} do grafo W_n, como apresenta a Figura 1b. O Teorema 2 apresenta o número de conexão arco-íris dos grafos leque.



(a) Um grafo roda W_4.



(b) Um grafo leque F_4.

Teorema 2. *[Sy et al. 2013] Seja F_n um grafo leque.*

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 2, \\ 2, & se\ 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & se\ n \geq 7. \end{cases}$$

Para provar que um grafo G não é arco-íris crítico, é suficiente mostrar que $rc(G-e) = rc(G)$, para alguma aresta e em G. Por outro lado, para provar que um grafo G é crítico, é necessário mostrar que a remoção de qualquer aresta do grafo G aumenta o seu número de conexão arco-íris. Na próxima seção é feita a discussão sobre a criticalidade das classes roda e leque.

3. Resultados

Os resultados desta seção estão divididos em dois teoremas. O primeiro mostra que a roda W_n é arco-íris crítica se e somente se $n = 3$. O segundo mostra que o leque F_n é arco-íris crítico se e somente se $n = 2$.

Teorema 3. *O grafo W_n é arco-íris crítico se e somente se $n = 3$.*

Demonstração. Primeiro observe que o menor grafo roda W_n tem $n = 3$. Além disso, W_3 é isomorfo ao grafo completo K_4. Como $rc(G) = 1$ se e só se G é completo, a remoção de uma aresta de W_3 aumenta o seu número de conexão arco-íris. Logo, W_3 é arco-íris crítico.

Para os demais casos, considere $W_n = C_n + K_1$ e rotule os vértices de C_n: $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ tal que v_i é adjacente a $v_{(i+1) \bmod n}$, $0 \leq i \leq n-1$. Seja $e = v_{n-1}v_0$. Observe que $W_n - e$ é isomorfo ao leque F_n. Portanto, $rc(W_n - e) = rc(F_n)$. Quando $n \geq 4$, pelos Teoremas 1 e 2, tem-se $rc(F_n) = rc(W_n)$. Portanto, $rc(W_n - e) = rc(W_n)$ quando $n \geq 4$ e conclui-se que W_n não é arco-íris crítico. □

Teorema 4. *O grafo F_n é arco-íris crítico se e somente se $n = 2$.*

Demonstração. Observe que F_n é isomorfo ao grafo junção $P_n + K_1$. Considere um grafo leque F_n e rotule os vértices de P_n: $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ tal que v_i é adjacente a v_{i+1}, $0 \leq i < n-1$. Seja x o vértice do grafo K_1.

O grafo F_2 é isomorfo ao grafo K_3 e, portanto, $rc(F_2) = 1$. Seja e uma aresta qualquer de F_2. Então, o grafo $F_2 - e$ é uma árvore com três vértices e, pelos resultados apresentados em [Chartrand et al. 2008], tem $rc(F_2 - e) = 2$. Logo, F_2 é um grafo arco-íris crítico.

Sejam $n = 3$ e $e = v_1x$. Então, $F_3 - e$ é isomorfo ao grafo C_4. Pelos resultados apresentados em [Chartrand et al. 2008], $rc(C_4) = 2$. Pelo Teorema 2, $rc(F_3) = 2$. Logo, $rc(F_3 - e) = rc(F_3)$ e o grafo F_3 não é arco-íris crítico.

Considere o caso $4 \leq n \leq 6$. Pelo Teorema 2, $rc(F_n) = 2$. É suficiente mostrar que existe uma aresta em F_n cuja remoção não aumenta o seu número de conexão arco-íris. Seja $e = v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. O grafo $F_n - e$ é a união de dois subgrafos leques, um isomorfo ao $F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ e outro isomorfo ao $F_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, com apenas o vértice x em comum. Uma coloração arco-íris utilizando 2 cores para estes grafos é apresentada na Figura 2. Portanto, quando $4 \leq n \leq 6$, tem-se $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 2$ e F_n não é arco-íris crítico.

ISSN: 2526-1371

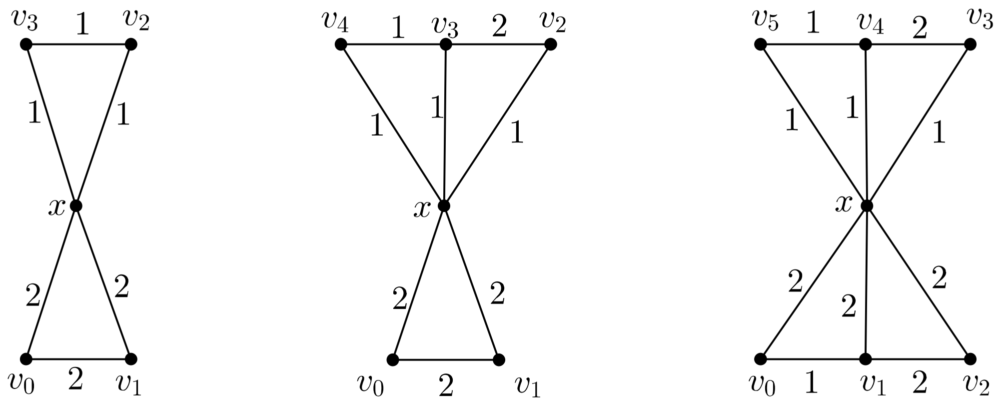


Figura 2. Leques F_4, F_5 e F_6 não arco-íris críticos.

O grafo F_7 tem $rc(F_7) = 3$, pelo Teorema 2. Seja $e = v_0v_1$. Note que $F_7 - e$ tem como subgrafo induzido um grafo F_6, onde $V(F_6) = \{v_1, v_2, \ldots, v_6, x\}$. Sabemos que F_6 tem uma coloração arco-íris com 2 cores, pelo Teorema 2. Como v_0 é um vértice pendente em $F_7 - e$, é necessário atribuir uma nova cor para a aresta v_0x de forma que se obtenha uma coloração arco-iris para $F_7 - e$. Logo, $rc(F_7 - e) = rc(F_7) = 3$. Portanto F_7 não é arco-íris crítico.

Resta considerar os casos em que F_n tem $n \geq 8$. Pelo Teorema 2, sabemos que $rc(F_n) = 3$ nestes casos. Seja $e = v_3v_4$. Vamos mostrar que $rc(F_n - e) = 3$. Para $0 \leq i < n$, pinte a aresta v_iv_{i+1} com cor 1 quando i é par e com cor 3 quando i é ímpar. Para $0 \leq i < n$, pinte a aresta v_ix com cor 3 se i é ímpar e com cor 2 se i é par. Note que existe um caminho de tamanho 1 entre x e qualquer outro vértice. Se i é ímpar e j é par, existe um caminho arco-íris v_ixv_j. Se i e j são ímpares, então o caminho arco-íris é $v_iv_{i-1}xv_j$. Se i e j são pares, então o caminho arco-íris é $v_iv_{i+1}xv_j$. Já que existe caminho arco-íris entre todo par de vértices, $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 3$. Portanto, F_n não é crítico. $\square$

4. Conclusão

É interessante observar que, mesmo os ciclos e os caminhos sendo grafos arco-íris críticos, os grafos $P_n + K_1$ com $n \geq 3$ e $C_n + K_1$ com $n \geq 4$ não são arco-íris críticos. Levantamos a seguinte questão: Seja G um grafo simples, conexo com n vértices, $n \geq 3$. Quando o grafo $G + K_1$ é arco-íris crítico? Sabe-se que se G é completo, então $G + K_1$ é arco-íris crítico. Um caminho hamiltoniano em um grafo G é um caminho que contém todos os vértices de G. Note que se G tem um caminho hamiltoniano, então $G + K_1$ tem um leque $F_{|V(G)|}$ como subgrafo e $rc(G + K_1) \leq 3$. Pode-se concluir que se G tem um caminho hamiltoniano e $rc(G + K_1) = 3$, então $|V(G)| \geq 7$ e $G + K_1$ não é arco-íris crítico pelo Teorema 4. Se G tem caminho hamiltoniano e $rc(G) = 2$, então $rc(G + K_1) = 2$, basta manter a mesma coloração arco-íris nas arestas do grafo G e reutilizar uma das duas cores para colorir as arestas da junção. Suponha que G tem uma coloração arco-íris com as cores 1 e 2 e que as arestas da junção foram coloridas com cor 1. Sejam v_1 e v_2 dois vértices consecutivos em um caminho hamiltoniano em G e x o vértice do grafo K_1. Ao remover a aresta v_1x, $G+K_1$ ainda tem uma coloração arco-íris com duas cores. Observe que é suficiente garantir um caminho arco-íris entre v_1 e x já que os caminhos arco-íris entre os demais pares de vértices estão preservados. Para tanto, se a aresta v_1v_2 estiver colorida com cor 1, pinte v_2x com cor 2 e vice-versa. Portanto $G + K_1$ não é arco-íris crítico.

Como trabalhos futuros sugere-se o estudo da criticalidade arco-íris de grafos junção $G+K_1$ nos casos em que G tem um caminho hamiltoniano (ou seja, $G+K_1$ tem um leque como subgrafo), $rc(G) = 3$ e $rc(G + K_1) = 2$.

Referências

Ananth, P., Nasre, M., and Sarpatwar, K. K. (2011). Rainbow connectivity: Hardness and tractability. In Chakraborty, S. and Kumar, A., editors, *IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2011)*, volume 13 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 241–251, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

Chakraborty, S., Fischer, E., Matsliah, A., and Yuster, R. (2011). Hardness and algorithms for rainbow connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*, 21:330–347.

Chandran, L. S. and Rajendraprasad, D. (2012). Rainbow colouring of split and threshold graphs. In *International Computing and Combinatorics Conference*, pages 181–192. Springer.

Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., and Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133(1):85–98.

Dudek, A., Frieze, A. M., and Tsourakakis, C. E. (2015). Rainbow connection of random regular graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(4):2255–2266.

Li, S. and Li, X. (2011). Note on the complexity of deciding the rainbow connectedness for bipartite graphs. *arXiv preprint arXiv:1109.5534*.

Li, X. and Sun, Y. (2012). *Rainbow connections of graphs*. Springer Science & Business Media.

Lo, I. Y. (2012). Some bounds on the rainbow connection number of 3-, 4-and 5-connected graphs. *arXiv preprint arXiv:1212.5934*.

Rao, K. S. and Murali, R. (2014). Rainbow critical graphs. *International Journal of Computer Application*, 4(4):252–259.

Rocha, A. and Almeida, S. M. (2017). Criticalidade arco-íris dos grafos resultantes de produto cartesiano de ciclos e caminhos. In *Anais do II Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais*, Ponta Grossa, PR.

Schiermeyer, I. (2009). Rainbow connection in graphs with minimum degree three. In *International Workshop on Combinatorial Algorithms*, pages 432–437. Springer.

Sy, S., Medika, G. H., and Yulianti, L. (2013). The rainbow connection of fan and sun. *Applied Mathematical Sciences*, 7(64):3155–3159.