Coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes em potências de caminho

Mayara Midori Omai*
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato km 04
Ponta Grossa, Paraná
omai@alunos.utfpr.edu.br

Sheila Morais de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato km 04
Ponta Grossa, Paraná
sheilaalmeida@utfpr.edu.br

Diana Sasaki Nobrega
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
R. São Francisco Xavier, 524
Maracanã, Rio de Janeiro
diana.sasaki@ime.uerj.br

RESUMO

O Problema da Coloração de Arestas Distinta nos Vértices Adjacentes consiste em, dado um grafo, utilizar o menor número de cores possível para colorir suas arestas de forma que arestas incidentes no mesmo vértice tenham cores distintas e o conjunto de cores incidentes em cada vértice seja diferente dos conjuntos de cores dos seus vizinhos. Nesse trabalho usamos a técnica *pullback* para resolver o Problema da Coloração de Arestas Distinta nos Vértices Adjacentes quando restrito aos grafos potências de caminho P_n^k, com $n \geq 3k$.

Palavras-chave

coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes; *pullback*; potência de caminho

ABSTRACT

The Adjacent Vertex Distinguishing Edge-Coloring Problem consists in assigning the minimum number of colors to the edges of a given graph, such that adjacent edges have distinct colors and the color set of each vertex is different of the color sets of its neighbours. In this work we use the pullback technique to solve the Adjacent Vertex Distinguishing Edge-Coloring Problem for the power of a path, P_n^k when $n \geq 3k$.

Keywords

adjacent vertex distinguishing edge-coloring; pullback; power of a path

*Bolsista da Fundação Araucária

WPCCG '16 Setembro 28, 2016, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

1. INTRODUÇÃO

Nesse trabalho, denota-se por $G = (V, E)$ um grafo conexo e simples com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E.

Em um grafo, dois elementos são adjacentes se: i) são um par de vértices que constituem uma aresta do grafo, ii) são duas arestas que contêm um mesmo vértice, ou iii) se são uma aresta e um dos vértices que a compõem. Classicamente, os problemas de coloração em grafos consistem em determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir os elementos de um grafo de forma que elementos adjacentes tenham cores distintas.

O Problema da Coloração de Vértices, por exemplo, consiste em colorir os vértices de um grafo de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas utilizando para tal o menor número de cores possível. O Problema da Coloração de Arestas consiste em colorir, com o menor número de cores possível, as arestas de um grafo de forma que arestas adjacentes tenham cores distintas. Outro problema de coloração em grafos bastante conhecido é o Problema da Coloração Total, que consiste em colorir tanto os vértices quanto as arestas de um grafo de forma que quaisquer dois elementos adjacentes tenham cores distintas. Tais problemas possuem diversas aplicações, dentre elas estão os problemas de alocação de recursos, escalonamento de tarefas, projeto de redes elétricas, projetos de circuitos e particionamento de conjuntos [3, 7].

Recentemente, outros problemas de coloração surgiram, impondo mais restrições à coloração de grafos. Dentre as restrições que podem ser impostas, algumas consideram o conjunto de cores de cada vértice, composto pelas cores das arestas que incidem no mesmo. Uma coloração de arestas é distinta nos vértices se o conjunto de cores em cada vértice do grafo é único [2].

Ainda considerando restrições sobre o conjunto de cores dos vértices de um grafo, pode-se relaxar a restrição de que tais conjuntos sejam únicos, exigindo-se apenas que os conjuntos de cores de vértices adjacentes sejam distintos. Tal coloração de arestas é chamada de coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes (coloração de arestas DVA). Um exemplo de coloração de arestas DVA pode ser visto na Figura 1. Note que a coloração de arestas do exemplo não é uma coloração de arestas distinta nos vértices, já que existem dois vértices com conjuntos de cores $\{0, 2, 3\}$, entretanto, é uma coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes, já que os vértices com mesmo conjunto de cores não são adjacentes.

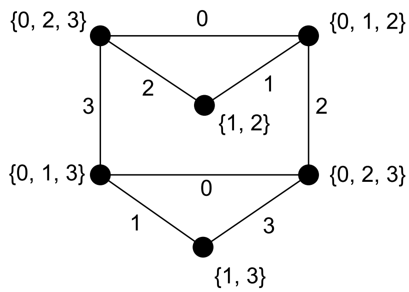

Figura 1: Exemplo de coloração de arestas DVA.

Zhang *et al.* [12] formalizaram e apresentaram os primeiros resultados sobre o Problema da Coloração de Arestas Distinta nos Vértices Adjacentes, que consiste em determinar o menor número de cores necessário para se obter uma coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes, chamado de índice cromático distinto nos vértices adjacentes e denotado por $\chi'_a(G)$.

Dentre as classes de grafos nas quais o Problema da Coloração de Arestas DVA está em aberto encontra-se a classe das potências de caminho. Um caminho com n vértices, P_n, é um grafo com conjunto de vértices $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E = \{(v_i, v_{i+1}), 0 \leq i < n-1\}$. Em um grafo G, a distância entre quaisquer dois vértices u e v é o número de arestas do menor caminho que conecta u a v em G. A k-ésima potência de um caminho com n vértices, denotada por P_n^k, é construída incluindo no grafo caminho, P_n, todas as arestas que conectam pares de vértices que estejam à distância até k no P_n.

Esse artigo apresenta uma solução para o Problema da Coloração de Arestas DVA em potências de caminho P_n^k com $n \geq 3k$.

2. PRELIMINARES

Segundo Zhang *et al* [12] se um grafo G desconexo é composto por n componentes $G_1, G_2, \ldots, G_n$ com pelo menos 3 vértices cada uma, então $\chi'_a(G) = \max\{\chi'_a(G_1), \chi'_a(G_2), \ldots, \chi'_a(G_n)\}$. Portanto, basta considerar os grafos conexos. Note que se um grafo G conexo é composto por um ou dois vértices, o mesmo não possui uma coloração de arestas DVA.

Os lemas a seguir são importantes para a compreensão desse trabalho.

Lema 2.1. (Chartrand e Zhang [3]) Seja K_n um grafo completo com $n \geq 3$. Se n é ímpar, então $\chi'_a(K_n) = n$ e, caso contrário, $\chi'_a(K_n) = n + 1$.

Observe que toda potência de caminho P_n^k com $n \leq k+1$ é isomorfa a um grafo completo e, portanto, para esses casos o Problema da Coloração de Arestas DVA está resolvido, pelo Lema 2.1.

O grau de um vértice v, denotado por $d(v)$, é o número de vizinhos de v no grafo. O grau máximo de G é o maior dos graus dos vértices de G, denotado por $\Delta(G)$. Um vértice v do grafo G é $\Delta(G)$-vértice se $d(v) = \Delta(G)$. O Lema 2.2 apresenta um limite inferior para $\chi'_a(G)$ quando G tem pelo menos dois vértices adjacentes com grau $\Delta(G)$.

Lema 2.2. (Chartrand e Zhang [3]) Se um grafo G possui pelo menos dois vértices de grau máximo adjacentes, então $\chi'_a(G) \geq \Delta(G) + 1$. Caso contrário, $\chi'_a(G) = \Delta(G)$.

Um grafo é indiferença se, e somente se, seus vértices podem ser linearmente ordenados de forma que vértices adjacentes sejam consecutivos. É importante ressaltar que as potências de caminho são subclasse dos grafos indiferença.

Sobre o Problema da Coloração de Arestas em grafos indiferença sabe-se que quando $\Delta(G)$ é ímpar este problema pode ser resolvido utilizando-se $\Delta(G)$ cores [4]. Ainda não é conhecida uma solução para o Problema de Coloração de Arestas em grafos indiferença quando $\Delta(G)$ é par, entretanto, existem soluções parciais. O problema está resolvido, por exemplo, para os grafos split-indiferença [8], indiferença reduzidos [6] e potências de caminho. Quando a potência de caminho P_n^k possui um vértice com grau $n-1$, o problema foi resolvido por Plantholt [9]. Quando $\Delta(P_n^k) < n-1$, basta atribuir as cores $2i-1$ e $2i$ para os caminhos induzidos pelas arestas entre vértices que estão a distância i no P_n ou somente a cor $2i-1$ se tais arestas induzem um emparelhamento. Em relação ao Problema da Coloração Total em grafos indiferença, sabe-se que a conhecida Conjectura da Coloração Total é verdadeira para esses grafos [5]. Segundo a Conjectura da Coloração Total, qualquer grafo simples G com grau máximo $\Delta(G)$ tem uma coloração total com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores [1, 11]. Além disso, Figueiredo *et al.* [5] provaram que, quando $\Delta(G)$ é par, existe uma coloração total do grafo indiferença utilizando $\Delta(G) + 1$ cores, uma solução ótima.

Tanto a solução para o Problema da Coloração de Arestas em grafos indiferença com $\Delta(G)$ ímpar, quanto as soluções conhecidas para o Problema da Coloração Total em grafos indiferença, foram obtidas utilizando uma técnica chamada *pullback*. A técnica *pullback* aplicada sobre um grafo G consiste na apropriação das cores das arestas e vértices (se coloridos) de um grafo completo para se obter uma coloração para G. Na Seção 3, apresentamos o índice cromático distinto nos vértices adjacentes do grafo P_n^k, $n \geq 3k$, usando a técnica *pullback*.

Concluimos essa seção apresentando brevemente como o *pullback* é utilizado para a coloração de arestas dos grafos indiferença com grau máximo ímpar.

2.1 Pullback para coloração de arestas

Dado um grafo indiferença G com $\Delta(G)$ ímpar, Figueiredo *et al.* [4] apresentam uma coloração de arestas ótima para G com $\Delta(G)$ cores. A técnica utilizada consiste em se apropriar da coloração de arestas de um grafo completo $K_{\Delta(G)+1}$ para colorir as arestas de G.

Um grafo completo K_n com n par pode ter suas arestas coloridas com $n-1$ cores com o seguinte procedimento. Rotule os vértices do K_n, v_0, v_1, ... , v_{n-2}, d. Atribua a cor $i + j \pmod{n-1}$, para a aresta (v_i, v_j) quando v_i e v_j são distintos de d. Atribua a cor $2i \pmod{n-1}$ para a aresta (v_i, d), $0 \leq i \leq n-2$.

Quando um grafo completo K_n tem n ímpar, não é possível colorir suas arestas com $n-1$ cores. Nesse caso, são necessárias pelo menos n cores e uma coloração ótima pode ser obtida removendo-se o vértice d de um grafo K_{n+1} previamente colorido como descrito. Note que, como todas as arestas incidentes no vértice d têm cores distintas, então na coloração de arestas do K_n com n ímpar o conjunto de cores de cada vértice também é distinto.

Considere um grafo indiferença G com grau máximo ímpar e uma coloração do $K_{\Delta(G)+1}$. A apropriação de cores do $K_{\Delta(G)+1}$ é feita como segue. Por definição, os vértices de G podem ser linearmente ordenados de forma que vértices adjacentes são consecutivos. Rotule os vértices de G, v_0, v_1, ..., $v_{\Delta(G)-1}$, d, v_0, v_1, ..., $v_{\Delta(G)-1}$, d. Pinte cada aresta (v_i, v_j) de G, com a cor da aresta (v_i, v_j) do $K_{\Delta(G)+1}$. Como $K_{\Delta(G)+1}$ é um grafo completo e G foi rotulado somente com os rótulos utilizados na coloração de arestas do $K_{\Delta(G)+1}$, então é possível pintar todas as arestas de G. Note que vértices com o mesmo rótulo estão a uma distância $\Delta(G)+2$ na ordem dos vértices. Então, nenhum vértice v é adjacente a dois vértices distintos que tenham rótulos iguais. Caso contrário, v teria grau $\Delta(G)+1$, o que seria um absurdo. Como nenhum vértice é adjacente a dois outros que tenham rótulos iguais, as arestas incidentes em um mesmo vértice tem cores distintas. Já que não é possível fazer uma coloração de arestas de um grafo G com menos que $\Delta(G)$ cores, essa coloração é ótima.

3. RESULTADOS

Essa seção apresenta a solução do Problema da Coloração de Arestas DVA para a k-ésima potência de caminho com $n \geq 3k$.

A ideia é considerar somente potências de caminho com $\Delta(P_n^k) = 2k$, que tenham pelo menos dois vértices adjacentes de grau máximo. Pelo Lema 2.2, tais grafos têm $\chi'_a(P_n^k) \geq 2k+1$. Vamos utilizar a técnica *pullback* se apropriando das cores de uma coloração de arestas do grafo completo K_{2k+1} feita como descrito na Seção 2.1. Dizemos que uma cor c sobra em um vértice v quando não existe aresta com cor c incidente em v. Observe que em cada vértice v_i do grafo completo K_{2k+1} sobra a cor $2i \mod (2k+1)$. Por construção, os vértices adjacentes com grau máximo no P_n^k terão conjuntos de cores distintos. Então, basta garantir que vértices com mesmo grau e que tenham grau menor que $2k$ não sejam adjacentes. Esta condição é garantida quando a potência de caminho tem pelo menos $3k$ vértices, como apresentado no Lema 3.1.

Lema 3.1. Seja G uma potência de caminho P_n^k. Se $n \geq 3k$, então não existem vértices v_l e v_r que são adjacentes e $d(v_l) = d(v_r) < \Delta(P_n^k)$.

Prova. Seja P_n^k uma potência de caminho tal que $n \geq 3k$. Como toda potência de caminho é um grafo indiferença, seus vértices podem ser linearmente ordenados de forma que vértices adjacentes sejam consecutivos na ordem. Considerando tal ordenação, rotule os vértices do grafo P_n^k, $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Sejam $L = \{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ e $R = \{v_{n-k}, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1}\}$ os conjuntos dos k primeiros e dos k últimos vértices nessa ordem. Como $n \geq 3k$, $\Delta(P_n^k) = 2k$. Observe que os vértices dos conjuntos L e R não são $\Delta(P_n^k)$-vértices. Portanto, $2k$ vértices têm grau menor que $\Delta(P_n^k)$. Por construção, quaisquer dois vértices do conjunto L (ou R) tem graus distintos. Então, se existem dois vértices v_l e v_r adjacentes e com graus $d(v_l) = d(v_r) < \Delta(G)$, um deles pertence a L e o outro pertence a R. Dentre os vértices de mesmo grau e que têm grau menor que $\Delta(P_n^k)$, os que estão mais próximos na ordem imposta aos vértices são v_{k-1} e v_{n-k}. Como por hipótese $n \geq 3k$, $n - k \geq 3k - k = 2k$. Então, v_{n-k} é o vértice v_{2k} ou algum vértice a sua direita na ordem linear. Logo, a distância entre quaisquer dois vértices v_l e v_r com $d(v_l) = d(v_r) < \Delta(P_n^k)$ é maior ou igual que a distância entre v_{k-1} e v_{2k}. Então, existem pelo menos k vértices entre v_l e v_r. Portanto, esses vértices não são adjacentes. ■

A seguir provamos que o índice cromático distinto nos vértices adjacentes do grafo P_n^k, com $n \geq 3k$, é $\Delta(P_n^k)+1$.

Teorema 3.2. *Se G é uma potência de caminho P_n^k com $n \geq 3k$, então $\chi'_a(G) = \Delta(G)+1$.*

Prova. É importante lembrar que as potências de caminho são uma subclasse dos grafos indiferença e, portanto, é possível aplicar a técnica *pullback*. Considere uma potência de caminho P_n^k com $n \geq 3k$. Para se obter uma coloração de arestas DVA faça o seguinte procedimento. Obtenha a coloração de arestas do grafo K_{2k+1}. Rotule os vértices do P_n^k: v_0, v_1, v_2, ... ,v_{2k}, ..., v_0, v_1, v_2, ... ,v_{2k}, v_0, ... Pinte cada aresta (v_i, v_j) do P_n^k, com a cor da aresta (v_i, v_j) do K_{2k+1}. Após o procedimento, todas as arestas do P_n^k estão coloridas, já que para qualquer par de rótulos a cor da aresta está definida no grafo K_{2k+1}.

Vamos garantir que a coloração de P_n^k é uma coloração de arestas DVA. Considere os conjuntos $L = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ e $R = \{v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3}, \ldots, v_{n-(k-1)}\}$. Por definição, $|L| = k$, $|R| = k$ e, para cada par de vértices v_i e v_j pertencentes ao conjunto L (ou ao conjunto R), tem-se $d(v_i) \neq d(v_j)$. Portanto, os vértices de L (R) possuem conjuntos de cores distintos. Pelo Lema 3.1 sabemos que não existe um vértice $v_l \in L$ que é adjacente a um vértice $v_r \in R$ tal que $d(v_l) = d(v_r) < \Delta(P_n^k)$ quando $n \geq 3k$. Logo, não existem vértices adjacentes com grau menor que $\Delta(P_n^k)$ que tenham conjuntos de cores com a mesma cardinalidade. Obviamente, vértices com grau menor que $\Delta(P_n^k)$ têm conjuntos de cores de tamanhos diferentes dos vértices com grau igual a $2k$ e, portanto, tais conjuntos de cores são diferentes. Por fim, falta garantir que cada par de vértices adjacentes em $V(P_n^k)\backslash(L \cup R)$ possuem conjuntos de cores distintos. Os $n - 2k$ vértices em $V(P_n^k) \setminus (L \cup R)$ têm grau $\Delta(P_n^k) = 2k$. Então, em cada um desses vértices o conjunto de cores é o mesmo do vértice correpondente no grafo K_{2k+1}. A coloração de arestas do grafo K_{2k+1} é distinta nos vértices, já que $2k+1$ é ímpar e, portanto, em cada vértice $v_i \in K_{2k+1}$ falta a cor $2i \pmod{2k+1}$, $0 \leq i \leq 2k$. Como vértices de grau máximo com conjuntos de cores iguais estão a distância $2k+1$ no grafo P_n^k, os mesmos não são adjacentes. Portanto, o conjunto de cores de quaisquer dois vértices adjacentes de grau $\Delta(P_n^k)$ é distinto. Assim, para qualquer P_n^k com $n \geq 3k$, é possível obter uma coloração de arestas DVA utilizando $\Delta(P_n^k)+1$ cores. ■

A Figura 2 apresenta uma coloração de arestas DVA para um grafo P_9^3 obtida com a técnica descrita no Teorema 3.2.

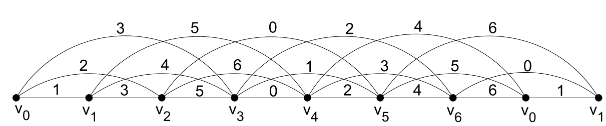

Figura 2: Coloração de arestas DVA do grafo P_9^3

A Figura 3 apresenta uma coloração de arestas do grafo P_7^3. Note que $n < 3k$, e que os vértices com rótulos 2 e 4 são adjacentes e apresentam conjunto de cores iguais. Portanto, a mesma técnica não pode ser aplicada diretamente para se obter uma coloração de arestas DVA quando $n < 3k$.

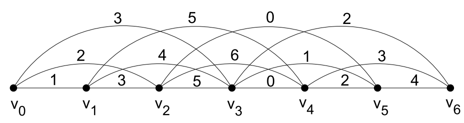

Figura 3: Coloração de arestas do grafo P_7^3

4. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Zhang *et al.* [12] conjecturam que $\Delta(G) \leq \chi'_a(G) \leq \Delta(G)+2$ para todo grafo G simples e conexo com pelo menos 3 vértices que não seja um C_5. Em *The avd-edge-coloring conjecture for some split graphs* [10], os autores provaram que tal conjectura é válida para os grafos split-indiferença. Os split-indiferença são grafos indiferença com até três cliques maximais. E nesse trabalho, provamos que essa conjectura é válida para as potências de caminho P_n^k com $n \geq 3k$. Essas duas classes de grafos têm interseção não-vazia, mas nenhuma delas contém propriamente a outra.

Como o índice cromático distinto nos vértices adjacentes de grafos completos, K_n, é conhecido e toda potência de caminho P_n^k com $n \leq k+1$ é um grafo completo, resta considerar os casos em que $k+1 < n < 3k$.

Nesses casos, sabemos que há vértices v_l e v_r que são adjacentes e têm graus $d(v_l) = d(v_r) < \Delta(P_n^k)$.

Pretende-se considerar também variações da coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes, como a coloração de arestas distinta nos vértices, a coloração total distinta nos vértices e a coloração total distinta nos vértices adjacentes.

5. REFERÊNCIAS

[1] M. Behzad. *Graphs and their chromatic numbers.* PhD thesis, Michigan State University, 1965.

[2] A. C. Burris and R. H. Schelp. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. *Journal of graph theory*, 26(2):73–82, 1997.

[3] G. Chartrand and P. Zhang. *Chromatic graph theory.* CRC press, 2008.

[4] C. M. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. On edge-colouring indifference graphs. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 286–299. Springer, 1995.

[5] C. M. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information processing letters*, 70(3):147–152, 1999.

[6] C. M. de Figueiredo, J. Meidanis, C. P. de Mello, and C. Ortiz. Decompositions for the edge colouring of reduced indifference graphs. *Theoretical computer science*, 297(1):145–155, 2003.

[7] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph coloring problems*, volume 39. John Wiley & Sons, 2011.

[8] C. Ortiz, N. Maculan, and J. L.Szwarcfiter. Characterizing and edge-coloring split-indiference graphs. *Discrete applied mathematics*, 82:209–217, 1998.

[9] M. Plantholt. The chromatic index of graphs with a spanning star. *Journal of graph theory*, 5(1):45–53, 1981.

[10] A. d. M. Vilas-Bôas and C. P. de Mello. The avd-edge-coloring conjecture for some split graphs. *Matemática contemporânea*, 44:1–10, 2015.

[11] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, 3:25–30, 1964. (in Russian).

[12] Z. Zhang, L. Liu, and J. Wang. Adjacent strong edge coloring of graphs. *Applied mathematics letters*, 15(5):623–626, 2002.