Propriedades do Conjunto Dominante Mínimo no Produto Lexicográfico

Filipe Rodrigues Pereira da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato km 04
Ponta Grossa, Paraná
filipesilva@alunos.utfpr.edu.br

Sheila Morais de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato km 04
Ponta Grossa, Paraná
sheilaalmeida@utfpr.edu.br

RESUMO

O Problema do Conjunto Dominante Mínimo é encontrar o menor conjunto de vértices D tal que todo vértice pertença a D ou seja vizinho de um vértice de D. Sabe-se que o Problema do Conjunto Dominante Mínimo é NP-completo. Neste trabalho investigamos o Problema do Conjunto Dominante Mínimo no produto lexicográfico de grafos. Devido a uma famosa conjectura de V. G. Vizing, este problema tem sido abordado com mais frequência no produto cartesiano de grafos, havendo poucos resultados em relação ao produto lexicográfico. Determinamos o número de dominação mínimo para alguns grafos resultantes do produto lexicográfico e apresentamos um limite superior justo para o número de dominação de qualquer produto lexicográfico.

Palavras chave

Conjunto Dominante; Produto Lexicográfico; Grafos k-partidos completos

ABSTRACT

The Minimum Dominating Set Problem is to find the least vertex set D such that every vertex belongs to D or it is adjacent to a vertex in D. It is known that the Minimum Dominating Set Problem is NP-complete. In this work we investigate the Minimum Dominating Set Problem on lexicographic product of graphs. Due to a famous conjecture of V. G. Vinzing, this problem has been more frequently studied on cartesian products of graphs and few results are related to the lexicographical product. We determine the domination number for some lexicographical product graphs and we present an upper bound for the domination number of any lexicographical product graph.

Keywords

Dominating set; Lexicographical Product; Complete k-partite Graphs

WPCCG '16 Setembro 28, 2016, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

1. INTRODUÇÃO

Seja $G = (V(G), E(G))$, um grafo G com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$, formado por pares não ordenados de G. Nesse trabalho, G é um grafo simples e não orientado. O número de vértices de G, ou ordem G, é denotado por $|V(G)| = n$, e o número de arestas de G é denotado por $|E(G)| = m$. Cada aresta do conjunto $E(G)$, constituída pelos vértices v e w, é denotada por vw e dizemos que v e w são adjacentes. A vizinhança aberta de um vértice $v \in V(G)$ consiste no conjunto de vértices adjacentes a v e é denotada por $N(v) = \{w \in V(G) : vw \in E(G)\}$. A vizinhança fechada de v consiste no conjunto de vértices adjacentes a v inclusive v e é denotada por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Um vértice v em um grafo G é universal se é vizinho de todos os outros vértices de G, ou seja, $|N[v]| = |V(G)|$.

Este trabalho aborda o problema de determinar o tamanho do conjunto dominante mínimo em grafos resultantes do produto lexicográfico. Dado um grafo qualquer, G, um conjunto de vértices $D \subseteq V(G)$ é chamado de conjunto dominante de G se todo vértice de G pertence a D ou é adjacente a um vértice de D. Quando um vértice v pertence a um conjunto dominante D ou é adjacente a um vértice de D, diz-se que v é dominado por D ou que D domina v. A cardinalidade mínima de um conjunto dominante $D \in V(G)$ é chamada de número de dominação e é denotada por $\gamma(G)$. O Problema do Conjunto Dominante Mínimo consiste em encontrar o número de dominação de um dado grafo G. O Problema do Conjunto Dominante Mínimo é um problema clássico de decisão NP-completo [4]. O produto lexicográfico de dois grafos G e H é o grafo $G \bullet H$ cujo conjunto de vértices é formado pelo produto dos conjuntos $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $V(H) = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k\}$ e dois vértices (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são adjacentes em $G \bullet H$ se $x_1x_2 \in E(G)$, ou se $x_1 = x_2$ e $y_1y_2 \in E(H)$.

Diversos resultados parciais foram publicados considerando o Problema do Conjunto Dominante Mínimo em produtos de grafos. Hartnell e Rall [2] mostraram a relação do número de dominação entre os produtos lexicográfico, categórico, forte e cartesiano. Em 1968 V. G. Vizing [6] propôs uma conjectura que determina um limite inferior para o conjunto dominante mínimo do produto cartesiano entre dois grafos. Em [1] são apresentados resultados parciais da conjectura de Vizing, considerando os grafos *claw-free* e classe A. Thanin [5] apresenta o número de dominação para o grafo resultante do produto lexicográfico entre um ciclo e um grafo qualquer. Zhang [7] apresenta o número de dominação do produto lexicográfico entre G e H em que G é um grafo simples e H um grafo com vértice universal. Neste trabalho, nós apresentamos o número de dominação do grafo resultante do produto lexicográfico $G \bullet H$, em que G é um grafo com vértice universal e H é um grafo simples qualquer. Como o produto lexicográfico não é uma operação comutativa, esse novo resultado junto com aquele apresentado em Zhang [7] garante que é possível determinar eficientemente o número de dominação de qualquer grafo resultante do produto lexicográfico $G \bullet H$ quando G ou H tem vértice universal. Além disso, determinamos o número de dominação do proguto lexicográfico de um grafo k-partido completo por um grafo simples qualquer. Nesse caso, em particular, ambos os grafos podem não ter vértice universal. Por fim, apresentamos um limite superior justo para o número de dominação de produtos lexicográficos de grafos simples e conexos.

2. CONJUNTO DOMINANTE

Em meados de 1850, na Europa, entusiastas do xadrez propuseram o problema de determinar o número mínimo de rainhas que podem ser posicionadas em um tabuleiro convencional de xadrez (8×8) de modo que todas as casas (quadrados) são atacadas por uma rainha ou são ocupadas por uma rainha. A Figura 1 mostra cinco rainhas posicionadas de forma que todas as casas sejam atacadas ou ocupadas. Sabe-se que este é o número mínimo necessário de rainhas para dominar o tabuleiro [3].

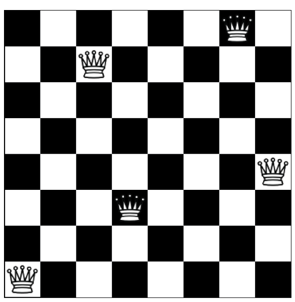

Figura 1: Uma possível solução do problema das cinco rainhas.

Tal problema pode ser modelado como o Problema do Conjunto Dominante Mínimo. Considere que cada casa do tabuleiro é um vértice de um grafo G e existe aresta entre dois vértices v_i e v_j se, e somente se, é possível deslocar a rainha entre as casas correspondentes a v_i e v_j com um único movimento. Se o conjunto de casas onde as rainhas estão posicionadas é o conjunto dominante mínimo do tabuleiro, então não existe nenhuma casa que não seja dominada por alguém do conjunto dominante ou que não faça parte do conjunto dominante.

2.1 Propriedades do produto lexicográfico

Como apresentado na introdução, o produto lexicográfico de dois grafos G e H é o grafo $G \bullet H$ cujo conjunto de vértices é formado pelo produto dos conjuntos $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $V(H) = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k\}$ e dois vértices (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são adjacentes em $G \bullet H$ se $x_1x_2 \in E(G)$, ou se $x_1 = x_2$ e $y_1y_2 \in E(H)$. Por exemplo, seja $P_3 = (V(P_3), E(P_3))$, com $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $E(P_3) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$; e seja $C_3 = (V(C_3), E(C_3))$, com $V(C_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $E(C_3) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3\}$. A Figura 2 mostra o produto lexicográfico $P_3 \bullet C_3$. As linhas contínuas mais finas representam arestas entre vértices do conjunto $\{v_i\} \times V(C_3)$. Observe que, para cada $v_i \in V(P_3)$, o conjunto $\{v_i\} \times V(C_3)$ induz um subgrafo isomorfo ao C_3. As linhas contínuas mais escuras evidenciam que cada vértice (v_i, u_k) é adjacente a todos os vértices (v_j, u_l), desde que $v_iv_j \in E(P_3)$ e $k \neq l$. As linhas intermitentes são as demais arestas do tipo (v_j, u_l) com $v_iv_j \in E(P_3)$ e $k \neq l$.

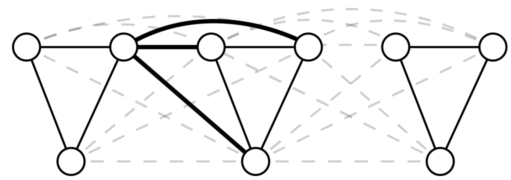

Figura 2: Grafo resultante de $G \bullet H$.

Considere o produto lexicográfico $G \bullet H$, onde $V(G) = \{v_1, v_2 \ldots, v_{|V(G)|}\}$. Para cada $v_i \in G$, seja H_{v_i} o subgrafo de $G \bullet H$ induzido por $\{v_i\} \times V(H)$. Se G é conexo, v_i é adjacente a algum vértice $v_j \in V(G)$, $i \neq j$. Pela definição de produto lexicográfico, (v_j, u) é adjacente a todos os vértices em H_{v_i}, qualquer que seja o vértice u do conjunto $V(H)$. Visto que todos os vértices de H_{v_i} possuem arestas incidentes em todos os vértices de cada subgrafo H_{v_j} quando $v_iv_j \in V(G)$, usamos duas linhas para representar as conexões entre todos os vértices de H_{v_i} e H_{v_j}. Os subgrafos H_{v_i} de $G \bullet H$ induzidos por $\{v_i\} \times V(H)$ são representados por círculos. A Figura 3 ilustra a representação do produto lexicográfico $P_3 \bullet C_3$. Perceba que, com esse tipo de representação gráfica, pode-se ter uma noção da estrutura do grafo $G \bullet H$ independentemente de qual seja a estrutura do grafo H.

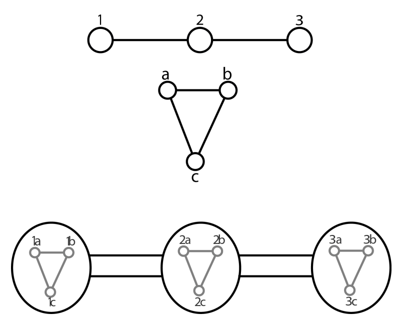

Figura 3: Grafos P_3, C_3 e representação gráfica do grafo $P_3 \bullet C_3$.

Um expressivo resultado de Zhang sobre número de dominação em produtos lexicográficos de grafos é apresentado no Teorema 1, a seguir.

Teorema 1. *Zhang [7] Se G é um grafo simples e H é um grafo com $\gamma(H) = 1$, então $\gamma(G \bullet H) = \gamma(G)$.*

Quando G tem um conjunto dominante de tamanho 1, o vértice que domina $V(G)$ é chamado de vértice universal. Observe que, como o produto lexicográfico não é comutativo, o Teorema 1 não estabelece um número de dominação mínimo para o caso em que G é um grafo com vértice universal e H um grafo simples com $\gamma(G) \geq 2$. Para este caso, apresentamos o Teorema 2, no qual provamos que $\gamma(G \bullet H) = 2$ quando $\gamma(H) \geq 2$.

TEOREMA 2. *Seja G é um grafo com vértice universal e H um grafo simples com $\gamma(H) \geq 2$. Se $|V(G)| \geq 2$, então $\gamma(G \bullet H) = 2$, caso contrário $\gamma(G \bullet H) = \gamma(H)$.*

PROOF. Seja G um grafo com vértice universal e H um grafo simples com $\gamma(H) \geq 2$. Se $|V(G)| = 1$, $G \bullet H$ é isomorfo ao grafo H e, portanto, $\gamma(G \bullet H) = \gamma(H)$. Considere então que $|V(G)| \geq 2$. Seja v o vértice universal em G. Então, para todo vértice $u \in V(H)$, o vértice $(v, u) \in G \bullet H$ domina todos os vértices (w, u) tal que $w \in G$ e $w \neq v$. Então, basta escolher qualquer vértice $(v, u) \in V(G \bullet H)$, tal que v seja vértice universal em G para dominar $V(G \bullet H) \setminus S$, onde $S = \{(v, u') : uu' \notin E(H)\}$. Como H não tem vértice universal, existe pelo menos um vértice u' não adjacente a u em H. Observe que $S \neq \emptyset$ e S é um subconjunto de vértices de H_v. Para dominar S, escolha qualquer vértice (v', z) tal que $v' \neq v$ e $vv' \in E(G)$. Como G tem vértice universal e ordem pelo menos 2, $vv' \in E(G)$. Então (v', z) é adjacente a todos os vértices do subgrafo H_v. Logo, (v', z) domina S. Portanto, $\gamma(G \bullet H) = 2$. $\square$

Nos casos em que nenhum dos grafos possui vértice universal, ainda é possível determinar o número de dominação no produto lexicográfico para algumas classes bem estruturadas, como os grafos k-partidos completos. Um grafo é k-partido completo quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos de forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, não pertencem ao mesmo conjunto da partição. O Teorema 3 apresenta o número de dominação entre um grafo k-partido completo e um outro grafo qualquer.

TEOREMA 3. *Se G é um grafo k-partido completo, $k \geq 2$, e H é um grafo simples sem vértice universal, $\gamma(G \bullet H) = 2$.*

PROOF. Seja G um grafo k-partido completo, $k \geq 2$ e H um grafo simples sem vértice universal. Considere a partição $[P_1, P_2, \ldots, P_k]$ de G em k conjuntos independentes disjuntos. Como G tem pelo menos duas partes, então dois vértices são necessários e suficientes para dominar G: um vértice em $v_1 \in P_1$ domina $V(G) \setminus P_1$ e um vértice em $v_2 \in P_2$ domina P_1. Então, $D = \{v_1, v_2\}$ é um conjunto dominante mínimo em G. Seja u um vértice qualquer em $V(H)$. Considere os vértices (v_1, u) e (v_2, u) pertencentes a $G \bullet H$. Observe que (v_1, u) domina todo vértice (v_i, w) tal que $v_i \notin P_1$, qualquer que seja $w \in V(H)$. Note que, nenhum vértice (v_i, w) com $i \neq 1$ tal que $v_i \in P_1$ é dominado por (v_1, u). Como H não tem vértice universal, existe pelo menos um vértice w não-adjacente a u em H. Para todo w tal que $uw \notin E(H)$, o vértice $(v_1, w) \in G \bullet H$ não é dominado por (v_1, u). Seja S o subconjunto dos vértices de $V(G \bullet H)$ não dominados. Note que tais vértices pertencem a subgrafos H_{v_i} tais que $v_i \in P_1$. Como $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto dominante em G, $v_2 \notin P_1$. Logo, qualquer vértice $(v_2, w) \in V(G \bullet H)$, é adjacente a todos os vértices de H_{v_i} tal que $v_i \in P_1$. Portanto, (v_2, w) domina S. Logo, $\gamma(G \bullet H) = 2$. $\square$

Considerando o grafo resultante de qualquer produto lexicográfico, apesar de não determinarmos o seu número de dominação, estabelecemos um limite superior justo para o mesmo. Este resultado é apresentado no Teorema 4.

TEOREMA 4. *Sejam G e H grafos simples e conexos, então $\gamma(G \bullet H) \leq 2\gamma(G)$.*

PROOF. Sejam $D = \{v_{t_1}, v_{t_2}, \ldots, v_{t_{\gamma(G)}}\}$ um conjunto dominante mínimo em G e $V(H) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{|V(H)|}\}$. Para cada $v_i \in G$, seja H_{v_i} o subgrafo de $G \bullet H$ induzido por $\{v_i\} \times V(H)$. Cada vértice (v_{t_i}, u_1) tal que $v_{t_i} \in D$ domina todos os vértices $(x, z) \in G \bullet H$ tal que $(v_{t_i}, x) \in E(G)$. Falta dominar os vértices dos subgrafos H_{v_i} tais que $v_i \in D$ e $N(v_i) \cap D = \emptyset$. Como o grafo G é conexo, v_i é adjacente a algum vértice $x \in G$. Portanto, (x, u_1) é adjacente a todos os vértices em H_{v_i}. Então, para cada H_{v_i} tal que $v_i \in D$, é necessário incluir no máximo um vértice no conjunto dominante de $G \bullet H$ para dominar os vértices de H_{v_i}. Portanto, $\gamma(G \bullet H) \leq 2\gamma(G)$. $\square$

3. CONCLUSÃO

Neste trabalho determinamo o número de dominação mínimo do produto lexicográfico entre um grafo com vértice universal e um outro qualquer e entre dois grafos sem vértice universal, onde o primeiro é um k-partido completo. Também definimos um limite superior para o número de dominação de $G \bullet H$, quando G e H são simples e conexos. Note que esse limite é justo pelo fato de que existem grafos cujo número de dominação mínimo é igual a $2\gamma(G)$ como no caso do produto lexicográfico de um C_6 por qualquer grafo com $\gamma(G) \geq 2$. É interessante notar que quanto menos componentes de tamanho 1 houverem no subgrafo induzido pelo conjunto dominante mínimo de G, menor será a cardinalidade do conjunto dominante de $G \bullet H$ obtido pela técnica do Teorema 4. Observe que quando todo vértice do conjunto dominante mínimo $D \subseteq V(G)$ possui um vizinho em D, então $\gamma(G \bullet H) = \gamma(G)$. Considerando esta observação é interessante investigar nos trabalhos futuros quais os grafos que sempre possuem um conjunto dominante mínimo sem componentes de tamanho 1. Uma caracterização de tais grafos seria um resultado relevante.

4. REFERENCES

[1] B. Bresar;et.al. Vizing's conjecture: A survey and recent results. *Journal of Graph Theory*, 69(1):46–76, 2011.

[2] B. Hartnell and D. F. Rall. *Domination in graphs, advanced topics.* Marcel Dekker, Inc., 1998. Domination in cartesian products: Vizing's Conjecture (Chapter 7), 163–189.

[3] T. W. Haynes. *Fundamentals of domination in graphs.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1 edition, 1998.

[4] D. S. J. Michael R. Garey. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman, 1 edition, 1979. p. 190, problem GT2.

[5] T. Sitthiwirattham. Domination on lexicographical product of cycles. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 75(1):193–200, 2013.

[6] V. G. Vizing. *Some unsolved problems in graph theory.* Uspehi Nauk, 23 edition, 1968.

[7] J. L. X. Zhang and J. Meng. Domination in lexicographic product graphs. *Ars Combin*, 101(1):251–256, 2011.