# Diversidade dos conjuntos independentes maximais em alguns grafos não-simpliciais

Aleffer Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato, s/n - Km 04 CEP
84016-210 - Ponta Grossa - PR - Brasil
aleffer@alunos.utfpr.edu.br

Sheila Morais de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato, s/n - Km 04 CEP
84016-210 - Ponta Grossa - PR - Brasil
sheilaalmeida@utfpr.edu.br

## RESUMO

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. A diversidade de $\mathcal{F}$, $\Upsilon(\mathcal{F})$, é a quantidade de cardinalidades diferentes dos conjuntos contidos em $\mathcal{F}$. Denota-se por $M(\Upsilon(\mathcal{F}))$ a classe dos grafos cuja diversidade dos conjuntos independentes maximais é $\Upsilon(\mathcal{F})$. Reconhecer os grafos da classe $M(t)$ para um dado $t$ é um problema Co-NP-completo. Entretanto, sabe-se que é possível reconhecer eficientemente os grafos que pertencem a $M(1)$ e os grafos simpliciais que pertencem a $M(2)$. Nesse trabalho apresentamos classes de grafos não-simpliciais que pertencem a $M(2)$ e que podem ser reconhecidas eficientemente.

## Palavras-chave

conjunto independente maximal; diversidade; prisma complementar

## ABSTRACT

Let $\mathcal{F}$ be a family of sets. The diversity of $\mathcal{F}$, $\Upsilon(\mathcal{F})$, is the amount of different cardinalities on the sets of $\mathcal{F}$. The class of graphs whose diversity of the maximal independent set equals $\Upsilon(\mathcal{F})$ is denoted by $M(\Upsilon(\mathcal{F}))$. Recognizing the $M(t)$ class for a given $t$ is a Co-NP-complete problem. However, it is possible to recognize the $M(1)$ graphs and the simplicial graphs in $M(2)$ efficiently. In this work we present non-simplicial graphs belonging to $M(2)$ that can be recognized by polynomial algorithms.

## Keywords

maximal independent set; diversity; complementary prism

## 1. INTRODUÇÃO

Nesse trabalho, os grafos considerados são simples, ou seja, não possuem laços, nem arestas múltiplas. Um conjunto independente em um grafo $G$ é um conjunto $I$ tal que os vértices contidos em $I$ não são adjacentes em $G$. Um conjunto independente de $G$ é maximal se não está propriamente contido em outro conjunto independente de $G$. Esse trabalho aborda o problema de se determinar a quantidade cardinalidades distintas de conjuntos independentes maximais em um grafo $G$.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. Definimos a diversidade de $\mathcal{F}$, $\Upsilon(\mathcal{F})$, como sendo a quantidade de cardinalidades diferentes dos conjuntos contidos em $\mathcal{F}$. Por exemplo, se $\mathcal{F} = \{\{1,4,5\},\{1,5,6\},\{1,4,7,9\},\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5,7\}\}$, então a diversidade de $\mathcal{F}$ é $\Upsilon(\mathcal{F}) = 3$, já que existem conjuntos com três cardinalidades distintas: conjuntos de tamanhos 3, 4 e 5.

Denota-se por $M(t)$ a classe dos grafos cuja diversidade dos conjuntos independentes maximais é $t$. Reconhecer os grafos da classe $M(t)$ para um dado $t$ é um problema Co-NP-completo [2]. Mesmo quando $t = 1$, determinar se um grafo pertence a $M(1)$ é um problema NP-difícil [3]. Entretanto, quando se restringe o problema a algumas classes de grafos específicas, existem algoritmos polinomiais para sua solução. Por exemplo, é possível determinar eficientemente quais os grafos simpliciais que pertencem a $M(2)$ [1]. Um grafo $G$ é simplicial, se cada vértice $v$ do grafo $G$ satisfaz uma das seguintes condições: 1) todos os vizinhos de $v$ são adjacentes entre si (nesse caso dizemos que $v$ é simplicial); ou 2) $v$ não é simplicial, mas tem um vizinho que é simplicial. Nesse trabalho apresentamos classes de grafos que não são simpliciais e cuja diversidade de seus conjuntos independentes maximais pode ser determinada eficientemente.

Uma dessas classes é a dos grafos $k$-partidos completos com pelo menos três vértices. Um grafo é $k$-partido se, e somente se, seu conjunto de vértices pode ser particionado em $k$ conjuntos independentes disjuntos. Considere um grafo $k$-partido com partição $[P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}]$. Se cada vértice da parte $P_i$ for adjacente a todos os vértices das partes $P_j$, quando $i \neq j$, o grafo $k$-partido é completo.

Outras classes para as quais apresentamos o número de diversidade do conjunto de conjuntos independentes maximais são os prismas complementares de grafos $k$-partidos completos e prismas complementares de grafos split completos. O prisma complementar de um grafo $G$, denotado por $G\overline{G}$, é a união disjunta dos grafos $G$ e $\overline{G}$ com a inclusão de uma aresta entre cada par de vértices correspondentes de $G$ e $\overline{G}$, onde $\overline{G}$ é o complemento do grafo $G$[1]. Um grafo é split se seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente, onde a clique é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Um grafo split

[1]O conceito de complemento de um grafo é definido na Seção 2.

WPCCG '16 Setembro 28, 2016, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

é completo se cada vértice da clique é adjacente a todos os vértices do conjunto independente.

Grafos split completos são simpliciais, uma vez que a vizinhança de qualquer vértice do conjunto independente constitui uma clique e, portanto, todo vértice do conjunto independente é simplicial e todo vértice da clique é vizinho de um vértice simplicial. Além disso, para um grafo split completo $G = [Q, S]$, onde $Q$ é a clique e $S$ é o conjunto independente, quando $|S| > 1$, há somente dois tamanhos de conjuntos independentes maximais: $|S|$ e 1, uma vez que cada vértice da clique é um conjunto independente máximal em $G$. Por outro lado, o prisma complementar de um grafo split completo não é um grafo simplicial e nesse trabalho mostramos que tais grafos pertencem a $M(2)$.

## 2. DEFINIÇÕES BÁSICAS E RESULTADOS ANTERIORES

Um grafo $G = (V, E)$ é dito vazio se o mesmo possui um conjunto $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de vértices e um conjunto $E = \emptyset$ de arestas.

Como já definido na introdução, um grafo é $k$-partido completo se é um $k$-partido cujos vértices de partes distintas são necessariamente adjacentes. Nesse trabalho, o grafo $k$-partido completo com partes de tamanhos $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ é denotado por $K_{[n_0;n_{k-1}]}$. Um grafo $G = [X, Y]$ é bipartido se seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes distintos, $X$ e $Y$. Observe que um grafo bipartido é um grafo $k$-partido com $k = 2$. Um grafo bipartido completo, $K_{m,n}$, é um grafo bipartido $G = [X, Y]$, com $|X| = m$ e $|Y| = n$, tal que cada vértice em $X$ é adjacente a todos os vértices de $Y$. Um grafo completo $K_n$ é um grafo com $n$ vértices dois a dois adjacentes.

O complemento de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, composto por todos os vértices de $G$, os quais são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se não são adjacentes em $G$.

Seja $G$ um grafo com $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ e $\overline{G}$ seu complemento com $V(\overline{G}) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, onde $u_i$ é o vértice de $\overline{G}$ correspondente a $v_i$ em $G$. O prisma complementar de $G$ é o grafo $G\overline{G} = (V(G) \cup V(\overline{G}), E(G) \cup E(\overline{G}) \cup M)$, tal que $M = \{(v_i, u_i), 0 \leq i < n\}$.

Como já mencionado, um vértice é simplicial se sua vizinhança é uma clique. Um simplex é um subgrafo de $G$ induzido por um vértice simplicial e seus vizinhos. Em [1] Barbosa e Hartnell provam o seguinte teorema.

TEOREMA 1. *Um grafo simplicial $G$ pertence a $M(2)$ se e somente se os vértices de $G$ podem ser particionados em conjuntos não-vazios $A$ e $Q$ tal que os vértices em $A$ pertençam a exatamente um simplex e aqueles em $Q$ a exatamente $k > 1$ simplexos onde os vértices de $Q$ formam uma clique.*

## 3. RESULTADOS

Os resultados estão divididos em duas partes: determinação da diversidade de conjuntos independentes maximais em grafos $k$-partidos completos e em prismas complementares de $k$-partidos completos e split completos.

### 3.1 Grafos k-partidos completos

Com o objetivo de facilitar a compreensão da prova para o caso dos grafos $k$-partidos completos, o Lema 1 apresenta primeiro o caso em que $k = 2$. A seguir, generalizamos tal resultado para o caso em que $k > 2$.

LEMA 1. *O grafo $K_{m,n} \in M(2)$ se, e somente se, $m \neq n$, caso contrário, $K_{m,n} \in M(1)$.*

PROVA. Sejam $[X, Y]$ a partição de $K_{m,n}$ tal que $|X| = m$ e $|Y| = n$, e $I$ um conjunto independente maximal do $K_{m,n}$. Considere que $I \cap X \neq \emptyset$. Então existe um vértice $v$ em $I \cap X$ e nenhum vértice de $Y$ pertence a $I$, pois são todos adjacentes a $v$. Como os vértices de $X$ são um conjunto independente e $I$ é maximal, $X = I$. Logo, $|I| = m$ quando $v \in X$. De mesmo modo podemos concluir que existe um outro conjunto independente maximal $I' = Y$ com tamanho $n$. Como todo vértice de $X$ é adjacente a todo vértice de $Y$, então não existe um conjunto independente com vértices de ambos os conjuntos. Portanto $I$ e $I'$ são os únicos conjuntos independentes maximais em $K_{m,n}$. Conclui-se que, quando $m \neq n$, o grafo $K_{m,n} \in M(2)$, caso contrário, $K_{m,n} \in M(1)$. $\square$

TEOREMA 2. *Se $G$ é um grafo $k$-partido completo com partição $\mathcal{F} = [A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}]$, então $G \in M(\Upsilon(\mathcal{F}))$.*

PROVA. Seja $G$ um grafo $k$-partido completo com partição $\mathcal{F} = [A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}]$. Considere um vértice $v \in A_i$ e seja $I$ um conjunto independente maximal que contém $v$. Como $v$ é adjacente a $V(G) \setminus A_i$, $S$ só pode conter vértices de $A_i$. Como $A_i$ é um conjunto independente e $I$ é maximal, $I = A_i$. Então cada vértice pertence a um único conjunto independente maximal. Então o conjunto de conjuntos independentes maximais distintos em $G$ é exatamente $\mathcal{F}$. Portanto o número de conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes é $\Upsilon(\mathcal{F})$. $\square$

### 3.2 Prismas complementares

Da mesma forma, esta seção apresenta primeiro a diversidade dos conjuntos independentes maximais de prismas complementares dos grafos bipartidos completos. Em seguida, o resultado é generalizado para grafos $k$-partidos completos com $k > 2$. Para apresentação da prova, é útil a seguinte observação.

OBSERVAÇÃO 1. $K_n \in M(1)$.

TEOREMA 3. *O grafo $K_{m,n}\overline{K_{m,n}} \in M(2)$ se, e somente se, $m \neq n$, caso contrário, $K_{m,n}\overline{K_{m,n}} \in M(1)$.*

PROVA. Seja $G = K_{m,n}\overline{K_{m,n}}$ o prisma complementar de $K_{m,n}$, tal que $m \neq n$. O grafo $G$ pode ser decomposto em três subgrafos disjuntos nas arestas: $K_{m,n}$, $\overline{K_{m,n}}$ e o subgrafo bipartido $B = [V(K_{m,n}), V(\overline{K_{m,n}})]$. Sejam $[X, Y]$ uma partição em dois conjuntos independentes dos vértices do subgrafo de $G$ isomorfo ao $K_{m,n}$ e $[X', Y']$ uma partição em duas cliques dos vértices do subgrafo de $G$ isomorfo ao $\overline{K_{m,n}}$. Pelo Lema 1, as partes $X$ e $Y$ são conjuntos independentes maximais do $K_{m,n}$. Então, $X$ é um conjunto independente de $G$, mas não é maximal já que $X$ não é adjacente a nenhum vértice de $Y'$. Como $Y'$ induz um grafo completo $K_n$, pela Observação 1, no máximo um vértice de $Y'$ pode fazer parte de qualquer conjunto independente maximal de $G$. Seja $u$ um vértice de $Y'$. Então, $I = X \cup \{u\}$ é um conjunto independente de $G$ e é maximal já que todos os vértices em $X' \cup Y$ são adjacentes a algum vértice de $X$ e todo vértice de $Y'$ é adjacente a $u$. Outros conjuntos independentes maximais podem ser obtidos removendo-se um vértice $v \in X$ do conjunto $I$ e inserindo seu correspondente do conjunto $X'$. Observe que, como $X'$ induz um grafo completo $K_m$, apenas 1 vértice de $X'$ pode pertencer a $I$, pela Observação 1. Como a substituição de um vértice de $X$ por um vértice de $X'$ não altera o tamanho do conjunto independente maximal, ainda temos apenas conjuntos independentes maximais de tamanho $|X| + 1$.

De forma análoga, $Y$ é um conjunto independente de $G$, mas não é maximal já que vértices de $Y$ não são adjacentes a vértices de $X'$. Como $X'$ é uma clique, apenas um vértice de $X'$ pode pertencer a qualquer conjunto independente maximal de $G$. Como cada vértice de $X \cup Y'$ é adjacente a algum vértice de $Y$, $I = Y \cup \{u\}$ tal que $u \in X'$ é um conjunto independente maximal. Então todo conjunto independente maximal de $G$ têm tamanho $|Y|+1$. Outros conjuntos independentes maximais podem ser obtidos substituindo-se um vértice de $Y$ pelo seu correspondente em $Y'$, mas como apenas um vértice de $Y'$ pode pertencer ao conjunto independente maximal, todos esses conjuntos independentes maximais têm tamanho $|Y|+1$. Portanto, todo conjunto independente maximal tem tamanho $m+1$ ou $n+1$ e $G \in M(2)$ se $m \neq n$ ou, caso contrário, $G \in M(1)$. $\square$

Teorema 4. *Seja $G$ o prisma complementar de $K_{[n_0;n_{k-1}]}$. Então $G \in M(\Upsilon(\mathcal{F}))$, onde $\mathcal{F} = \{n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}\}$.*

Prova. Considere um grafo $k$-partido completo $K_{[n_0;n_{k-1}]}$ e seja $G$ o seu prisma complementar. Os vértices de $G$ podem ser particionados em cliques $Q_i$ e conjuntos independentes $P_i$, $0 \leq i < k$, onde cada parte $P_i$ é um conjunto independente maximal do $K_{[n_0;n_{k-1}]}$, para todo $0 \leq i < k$. Além disso, a cada $P_i$ corresponde uma clique $Q_i$ e cada vértice $u_{i,j} \in Q_i$ é adjacente a $v_{i,j} \in P_i$, $0 \leq i < k$.

Seja $I$ um conjunto independente de $G$ que contém $P_i$. Então $Q_i \cap I = \emptyset$. Por outro lado, qualquer vértice $u_{t,j} \in Q_t$, com $t \neq i$, pode pertencer a $I$ e se $G$ não contém nenhum desses vértices, não é maximal. Então seja $u_{t,j} \in Q_t$, $t \neq i$ um vértice em $I$. Nenhum outro vértice de $Q_t$ pode pertencer a $I$. Adotando o mesmo raciocínio, para toda clique $Q_z \neq Q_i$, tem-se $|Q_z \cap I| = 1$ quando $I$ é maximal. Então os vértices de uma parte $P_i$ qualquer unidos com um vértice de cada clique $Q_z$, $z \neq i$, são um conjunto independente maximal. Portanto, nesses casos, $|I| = |P_i| + k - 1$.

Existem três formas de criar outros conjuntos independentes maximais:

1. substituir exatamente um vértice de $P_i$ pelo seu correspondente em $Q_i$;
2. substituir o vértice $u_{t,j}$ de $Q_t \cap I$ por outro vértice $u_{t,y}$, $y \neq j$;
3. realizar o mesmo processo de construção de $I$ a partir de outra parte de $K_{[n_0;n_{k-1}]}$ que não seja $P_i$.

Observe que as duas primeiras alterações criam novos conjuntos independentes maximais com o mesmo tamanho de $I$, apenas substituindo um vértice por outro. Por outro lado, a terceira alteração pode criar conjuntos independentes maximais com cardinalidades diferentes de $|I|$, desde que o tamanho da parte escolhida seja diferente do tamanho de $P_i$.

Portanto, a quantidade de conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes em $G$ é igual ao número de tamanhos diferentes das partes do $K_{[n_0;n_{k-1}]}$, ou seja, $G \in M(\Upsilon([n_0; n_{k-1}]))$. $\square$

Teorema 5. *Se $G\overline{G}$ é prisma complementar de um grafo split completo $G = [Q, S]$, então $G\overline{G} \in M(2)$ quando $|S| > 1$ e $G\overline{G} \in M(1)$, caso contrário.*

Prova. Seja $G\overline{G}$ o prisma complementar de um grafo split completo, $G$, particionado em 4 subconjuntos de vértices: $Q$, uma clique de $G$; $S$, um conjunto independente de $G$; $Q'$ e $S'$, cujos vértices pertencem ao subgrafo $\overline{G}$ e correspondem, respectivamente, aos vértices de $Q$ e $S$.

Observe que $S$ e $Q'$ são conjuntos independentes em $G\overline{G}$ e não existe aresta entre vértices de $S$ e $Q'$. Então, $I = S \cup Q'$ é um conjunto independente de $G\overline{G}$ de tamanho $|S| + |Q|$. Tal conjunto independente é maximal, já que todo vértice de $S'$ é adjacente a algum vértice de $S$ e todo vértice de $Q$ é adjacente a algum vértice de $Q'$.

Agora, resta considerar os casos em que algum vértice de $Q$ ou $S'$ pertence a um conjunto independente maximal $I$ em $G\overline{G}$. Primeiro, suponha que um vértice $v \in Q$ pertence a $I$. Então nenhum outro vértice de $Q$ ou $S$ pertence a $I$. Então, todos os vértices de $Q'$, exceto o correspondente a $v$, pertencem a $I$. Como nenhum vértice de $S$ pertence a $I$, algum vértice de $S'$ deve pertencer a $I$ e apenas um, já que $S'$ é uma clique. Portanto, $I$ é um conjunto independente maximal de tamanho $|Q| + 1$.

O último caso é quando um vértice $v \in S'$ está no conjunto independente maximal $I$. Como $S'$ é uma clique, nenhum outro vértice de $S'$ pertence a $I$. Há dois subcasos: 1) algum vértice de $S$ pertence a $I$, ou 2) nenhum vértice de $S$ pertence a $I$.

**Subcaso 1:** se algum vértice de $S$ não correspondente a $v$ pertence a $I$, então, nenhum vértice de $Q$ pertence a $I$, todo vértice de $Q'$ pertence a $I$, e todo vértice de $S$ não correspondente a $v$ pertence a $I$. Nesse caso, $|I| = |S| + |Q'| = |Q| + |S|$.

**Subcaso 2:** se nenhum vértice de $S$ pertence a $I$. Então, ou algum vértice de $Q$ pertence a $I$ ou todos os vértices de $Q'$ pertencem a $I$. Se algum vértice $u \in Q$ está em $I$, todos os vértices de $Q'$ menos o correspondente a $u$ pertencem a $I$. Em ambos os casos $|I| = |Q| + |S|$.

Portanto, $G\overline{G}$ tem dois possíveis tamanhos de conjuntos independentes maximais: $|Q| + |S|$ e $|Q| + 1$. Logo, quando $|S| > 1$, $G\overline{G} \in M(2)$ e, caso contrário, $G\overline{G} \in M(1)$. $\square$

# 4. CONCLUSÃO

Nesse trabalho, pela primeira vez foi definido o conceito de diversidade de um conjunto de conjuntos. Além disso, determinamos a diversidade dos conjuntos independentes maximais das seguintes classes de grafos não-simpliciais: $k$-partidos completos de ordem pelo menos três, prismas complementares de $k$-partidos completos e de split completos. O estudo da diversidade de conjuntos independentes maximais em prismas complementares não-simpliciais se mostrou um campo fértil para o desenvolvimento de pesquisa. Entretanto acreditamos que classes não definidas a partir do conceito de partição em cliques e/ou conjuntos independentes sejam muito mais difíceis de se trabalhar. Para trabalhos futuros é interessante considerar prismas complementares de grafos bipartidos e splits não completos.

# 5. REFERÊNCIAS


[1] R. Barbosa and B. Hartnell. Some problems based on the relative sizes of the maximal independent sets in a graph. *Congressus Numerantium*, 131(5):115–121, 1998.

[2] Y. Caro, A. Sebő, and M. Tarsi. Recognizing greedy structures. *Journal of Algorithms*, 20(1):137–156, 1996.

[3] D. Tankus and M. Tarsi. The structure of well-covered graphs and the complexity of their recognition problems. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 69(2):230–233, 1997.