Coloração de Arestas em split-co-comparabilidade

Luis Gustavo da Soledade Gonzaga
sole.dade.lg@gmail.com
Orientadora: Profª. Drª. Sheila Morais de Almeida

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

19 de Setembro de 2019

Sumário

Coloração em grafos

- Uma coloração de arestas é uma atribuição de cores para as arestas de um grafo
- Em uma coloração própria de arestas, arestas adjacentes tem cores diferentes.
- Por simplicidade as cores normalmente são representadas por números.

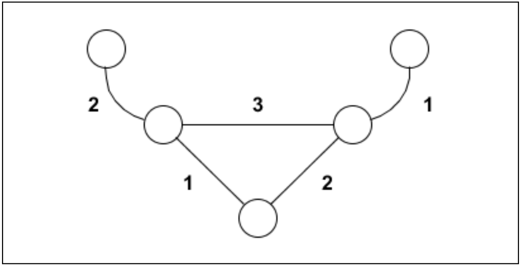


Figura 1: Coloração de arestas no grafo touro

Problema da Coloração de Arestas

- Encontrar o menor número de cores que permite uma coloração de arestas em um grafo.
- O número encontrado é chamado de índice cromático e denotado $\chi'(G)$.
- O menor valor de $\chi'(G)$ é $\Delta(G)$ para qualquer grafo G.

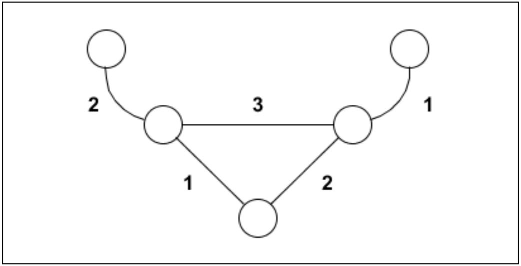


Figura 2: Coloração de arestas no grafo touro

Teorema de Vizing

Teorema (Vizing, 1964)

Para qualquer grafo G, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

- Em conclusão a esse Teorema $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Deu origem a um novo problema em coloração de arestas, o Problema da Classificação.
- No Problema da Classificação um grafo G é Classe 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$ e Classe 2 se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$

Complexidade do Problema

- O problema ainda é difícil mesmo sendo limitado pelo Teorema de Vizing.

Teorema (Holyer, 1981)

Decidir se um grafo qualquer G é Classe 1 ou Classe 2 é NP-Completo.

Coluna de Johnson

- Coluna publicada em periódico com um compilado de problemas relacionados a grafos.
- Os problemas recebem classificação baseada em sua dificuldade de resolução, ou seu resultado caso já tenha sido resolvido.
- Uma das classes apresentadas é a dos grafos split, e um dos problemas o da coloração de arestas.

Tabela de Johnson

GRAPH CLASS	MEMBER	INDSET	CLIQUE	CLIPAR	CHRNUM	CHRIND	HAMCIR	DOMSET	MAXCUT	STTREE	GRAISO
Trees/Forests	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]
Almost Trees (k)	P	P [24]	P [T]	P?	P?	P?	P?	P [45]	P?	P?	P?
Partial k-Trees	P [2]	P [1]	P [T]	P?	P [1]	O?	P [3]	P [3]	P?	P?	O?
Bandwidth-k	P [68]	P [64]	P [T]	P?	P [64]	P?	P?	P [64]	P [64]	P?	P [58]
Degree-k	P [T]	N [GJ]	P [T]	N [GJ]	N [GJ]	N [49]	N [GJ]	N [GJ]	N [GJ]	N [GJ]	P [58]
Planar	P [GJ]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	O	N [GJ]	N [GJ]	P [GJ]	N [35]	P [GJ]
Series Parallel	P [79]	P [75]	P [T]	P?	P [74]	P [74]	P [74]	P [54]	P [GJ]	P [82]	P [GJ]
Outerplanar	P	P [6]	P [T]	P [6]	P [67]	P [67]	P [T]	P [6]	P [GJ]	P [81]	P [GJ]
Halin	P	P [6]	P [T]	P [6]	P [74]	P [74]	P [T]	P [6]	P [GJ]	P?	P [GJ]
k-Outerplanar	P	P [6]	P [T]	P [6]	P [6]	O?	P [6]	P [6]	P [GJ]	P?	P [GJ]
Grid	P	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	N [51]	N [55]	P [T]	N [35]	P [GJ]
$K_{3,3}$-Free	P [4]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	O?	N [GJ]	N [GJ]	P [5]	N [GJ]	O?
Thickness-k	N [60]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	N [49]	N [GJ]	N [GJ]	N [7]	N [GJ]	O?
Genus-k	P [34]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	O?	N [GJ]	N [GJ]	O?	N [GJ]	P [61]
Perfect	O!	P [42]	P [42]	P [42]	P [42]	O?	N [1]	N [14]	O?	N [GJ]	I [GJ]
Chordal	P [76]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	N [22]	N [14]	O?	N [83]	I [GJ]
Split	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	N [22]	N [19]	O?	N [83]	I [15]
Strongly Chordal	P [31]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O?	P [32]	O?	P [83]	O?
Comparability	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	N [1]	N [28]	O?	N [GJ]	I [GJ]
Bipartite	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	N [1]	N [28]	P [T]	N [GJ]	I [GJ]
Permutation	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O	P [33]	O?	P [23]	P [21]
Cographs	P [T]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	P [25]	P [33]	O?	P [23]	P [25]
Undirected Path	P [39]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O?	N [16]	O?	O?	I [GJ]
Directed Path	P [38]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O?	P [16]	O?	P [83]	O?
Interval	P [17]	P [44]	P [44]	P [44]	P [44]	O?	P [53]	P [16]	O?	P [83]	P [57]
Circular Arc	P [78]	P [44]	P [50]	P [44]	N [36]	O?	O?	P [13]	O?	P [83]	O?
Circle	P [71]	P [GJ]	P [50]	O?	N [36]	O?	P [12]	O?	O?	P [70]	O?
Proper Circ. Arc	P [77]	P [44]	P [50]	P [44]	P [66]	O?	P [12]	P [13]	O?	P [83]	O?
Edge (or Line)	P [47]	P [GJ]	P [T]	N [GJ]	N [49]	O?	N [11]	N [GJ]	O?	N [70]	I [15]
Claw-Free	P [T]	P [63]	O?	N [GJ]	N [49]	O?	N [11]	N [GJ]	O?	N [70]	I [15]

Figura 3: Tabela de Johson, 1985

Tabela de Johnson

GRAPH CLASS	MEMBER		INDSET		CLIQUE		CLIPAR		CHRNUM		CHRIND		HAMCIR		DOMSET		MAXCUT		STTREE		GRAISO	
Trees/Forests	P	[T]	P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]	P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]
Almost Trees (k)	P		P	[24]	P	[T]	P?		P?		P?		P?		P	[45]	P?		P?		P?	
Partial k-Trees	P	[2]	P	[1]	P	[T]	P?		P	[1]	O?		P	[3]	P	[3]	P?		P?		O?	
Bandwidth-k	P	[68]	P	[64]	P	[T]	P?		P	[64]	P?		P?		P	[64]	P	[64]	P?		P	[58]
Degree-k	P	[T]	N	[GJ]	P	[T]	N	[GJ]	N	[GJ]	N	[49]	N	[GJ]	N	[GJ]	N	[GJ]	N	[GJ]	P	[58]
Planar	P	[GJ]	N	[GJ]	P	[T]	N	[10]	N	[GJ]	O		N	[GJ]	N	[GJ]	P	[GJ]	N	[35]	P	[GJ]
Series Parallel	P	[79]	P	[75]	P	[T]	P?		P	[74]	P	[74]	P	[74]	P	[54]	P	[GJ]	P	[82]	P	[GJ]
Outerplanar	P		P	[6]	P	[T]	P	[6]	P	[67]	P	[67]	P	[T]	P	[6]	P	[GJ]	P	[81]	P	[GJ]
Halin	P		P	[6]	P	[T]	P	[6]	P	[74]	P	[74]	P	[T]	P	[6]	P	[GJ]	P?		P	[GJ]
k-Outerplanar	P		P	[6]	P	[T]	P	[6]	P	[6]	O?		P	[6]	P	[6]	P	[GJ]	P?		P	[GJ]
Grid	P		P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]	N	[51]	N	[55]	P	[T]	N	[35]	P	[GJ]
$K_{3,3}$-Free	P	[4]	N	[GJ]	P	[T]	N	[10]	N	[GJ]	O?		N	[GJ]	N	[GJ]	P	[5]	N	[GJ]	O?	
Thickness-k	N	[60]	N	[GJ]	P	[T]	N	[10]	N	[GJ]	N	[49]	N	[GJ]	N	[GJ]	N	[7]	N	[GJ]	O?	
Genus-k	P	[34]	N	[GJ]	P	[T]	N	[10]	N	[GJ]	O?		N	[GJ]	N	[GJ]	O?		N	[GJ]	P	[61]
Perfect	O!		P	[42]	P	[42]	P	[42]	P	[42]	O?		N	[1]	N	[14]	O?		N	[GJ]	I	[GJ]
Chordal	P	[76]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		N	[22]	N	[14]	O?		N	[83]	I	[GJ]
Split	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		N	[22]	N	[19]	O?		N	[83]	I	[15]
Strongly Chordal	P	[31]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		O?		P	[32]	O?		P	[83]	O?	
Comparability	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		N	[1]	N	[28]	O?		N	[GJ]	I	[GJ]
Bipartite	P	[T]	P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]	P	[T]	P	[GJ]	N	[1]	N	[28]	P	[T]	N	[GJ]	I	[GJ]
Permutation	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		O		P	[33]	O?		P	[23]	P	[21]
Cographs	P	[T]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		P	[25]	P	[33]	O?		P	[23]	P	[25]
Undirected Path	P	[39]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		O?		N	[16]	O?		O?		I	[GJ]
Directed Path	P	[38]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	P	[40]	O?		O?		P	[16]	O?		P	[83]	O?	
Interval	P	[17]	P	[44]	P	[44]	P	[44]	P	[44]	O?		P	[53]	P	[16]	O?		P	[83]	P	[57]
Circular Arc	P	[78]	P	[44]	P	[50]	P	[44]	N	[36]	O?		O?		P	[13]	O?		P	[83]	O?	
Circle	P	[71]	P	[GJ]	P	[50]	O?		N	[36]	O?		P	[12]	O?		O?		P	[70]	O?	
Proper Circ. Arc	P	[77]	P	[44]	P	[50]	P	[44]	P	[66]	O?		P	[12]	P	[13]	O?		P	[83]	O?	
Edge (or Line)	P	[47]	P	[GJ]	P	[T]	N	[GJ]	N	[49]	O?		N	[11]	N	[GJ]	O?		N	[70]	I	[15]
Claw-Free	P	[T]	P	[63]	O?		N	[GJ]	N	[49]	O?		N	[11]	N	[GJ]	O?		N	[70]	I	[15]

Figura 4: Tabela de Johson, 1985

Grafos Split

Definição

Um grafo split $G = [K, S]$ é um grafo em que o conjunto dos vértices de $V(G)$ pode ser particionado em uma clique K e um conjunto independente S.

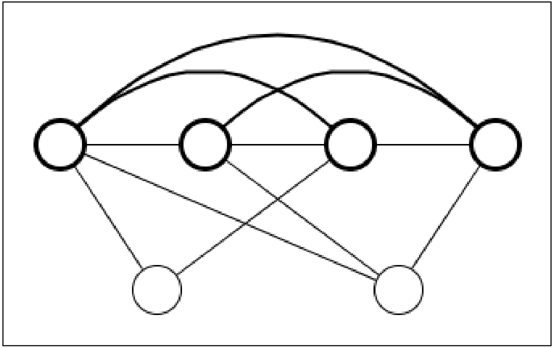


Figura 5: Exemplo de um grafo split

Grafos Split

Definição

Um grafo split $G = [K, S]$ é um grafo em que o conjunto dos vértices de $V(G)$ pode ser particionado em uma clique K e um conjunto independente S.

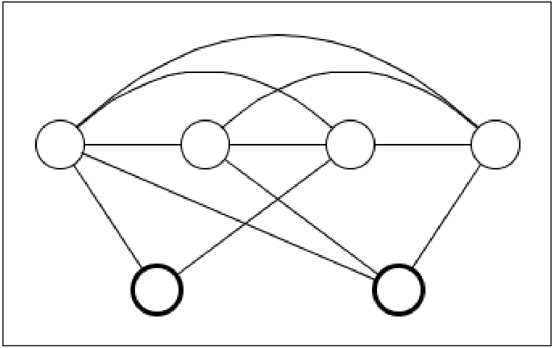


Figura 6: Exemplo de um grafo split

Grafos comparabilidade

Definição

Um grafo comparabilidade é um grafo que aceita uma orientação transitiva de suas arestas.

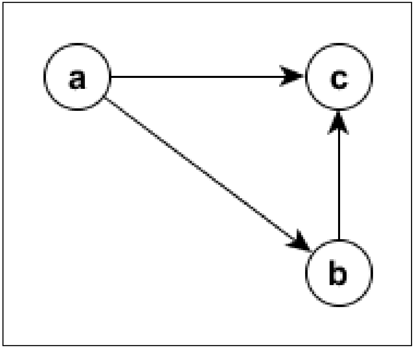


Figura 7: Orientação transitiva

Grafos comparabilidade

Definição

Um grafo comparabilidade é um grafo que aceita uma orientação transitiva de suas arestas.

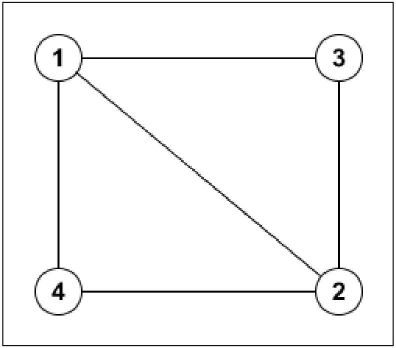


Figura 8: Grafo comparabilidade

Grafos comparabilidade

Definição

Um grafo comparabilidade é um grafo que aceita uma orientação transitiva de suas arestas.

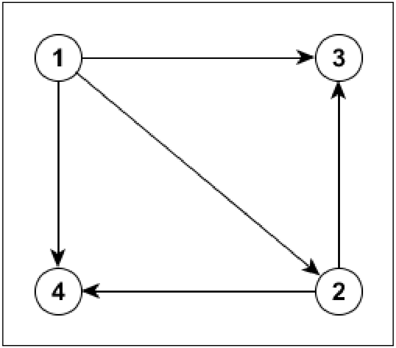


Figura 9: Grafo comparabilidade

Split-comparabilidade

Definição

Um grafo Split que aceita uma orientação transitiva de suas arestas é um split-comparabilidade.

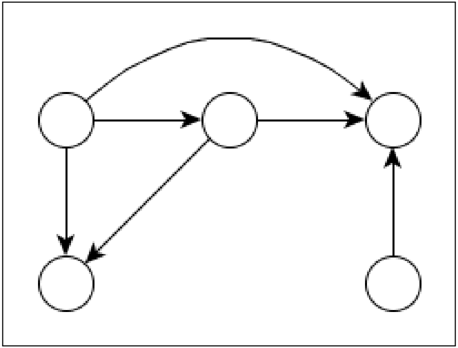


Figura 10: Split-comparabilidade

Split-comparabilidade

- Ortiz et al. (1996) criaram uma caracterização para split-comparabilidade e Cruz et al. (2017) resolveram o Problema da Coloração de Arestas para essa classe.

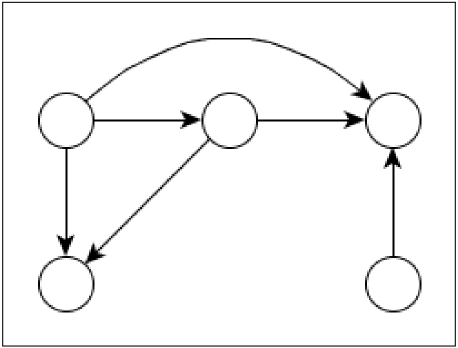


Figura 11: Split-comparabilidade

Grafos co-comparabilidade

Definição

Um grafo cujo complemento seja comparabilidade é chamado de co-comparabilidade.

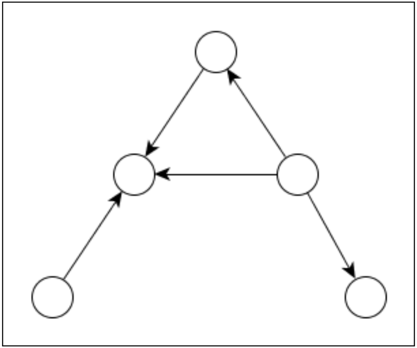


Figura 12: Grafo comparabilidade

Grafos co-comparabilidade

Definição

Um grafo cujo complemento seja comparabilidade é chamado de co-comparabilidade.

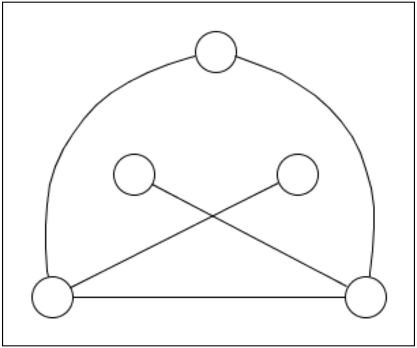


Figura 13: grafo co-comparabilidade

Split-co-comparabilidade

Definição

Um grafo split cujo complemento seja comparabilidade é chamado de split-co-comparabilidade.

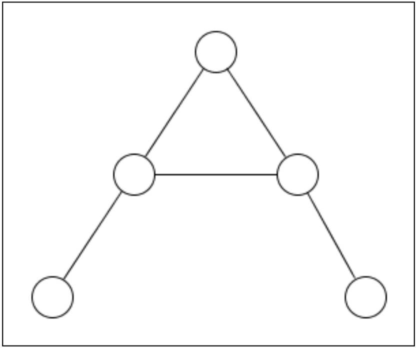
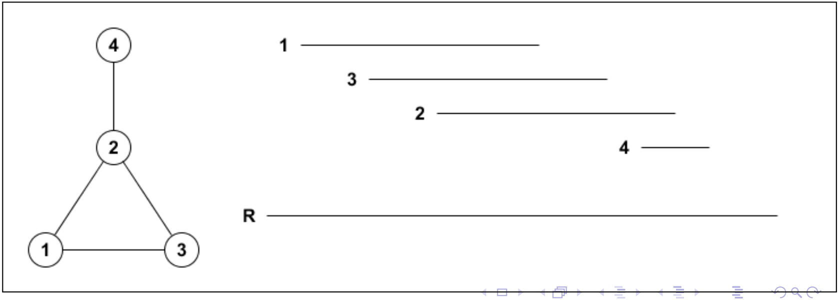


Figura 14: split-co-comparabilidade

Grafo de intervalos

Definição

Um grafo é interseção de intervalos se podemos encontrar um conjunto de intervalos na reta real onde cada intervalo representa um vértice no grafo e cada aresta entre dois vértices é representado por uma sobreposição dos intervalos correspondentes por esses vértices.



Split-intervalo

- Um grafo que é split e intervalo ao mesmo tempo é um split-intervalo.
- A classe dos grafos de intervalos é a interseção das classes co-comparabilidade e cordal.
- Os grafos split são subclasse dos cordais, logo as classes split-co-comparabilidade e split-intervalo são equivalentes.
- Assim é possível representar grafos split-co-comparabilidade usando conjuntos de intervalos na reta real como nos grafos de intervalos.

Split-intervalo

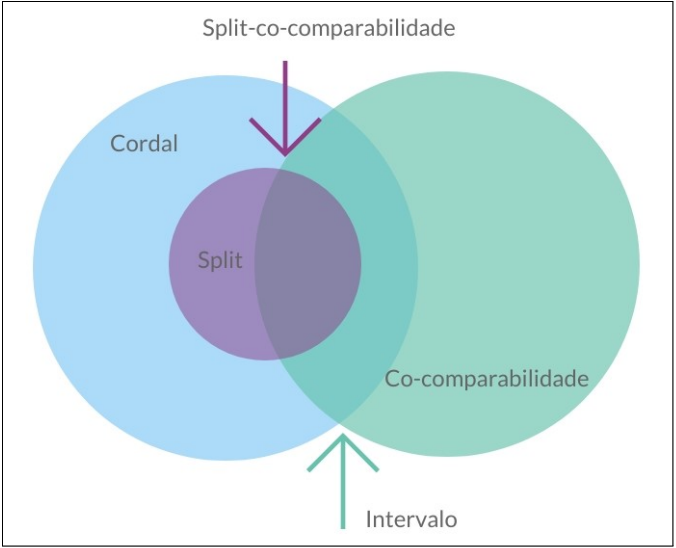


Figura 16: Relação entre classes

Grafo indiferença

Definição

Um grafo indiferença é um grafo de intervalos onde cada intervalo representado na reta real deve ter o mesmo tamanho.

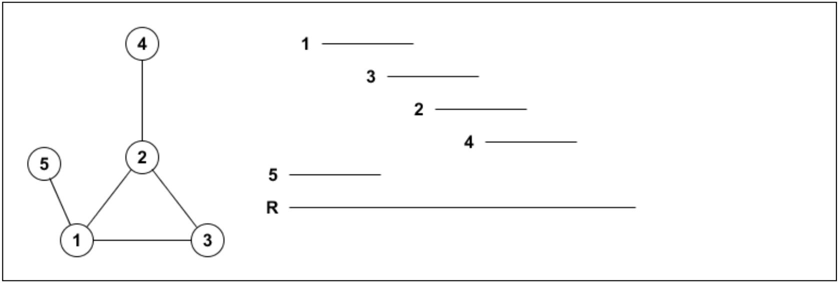


Figura 17: grafo indiferença

Grafo split-indiferença

Definição

Um split-indiferença é um grafo que é split e indiferença ao mesmo tempo.

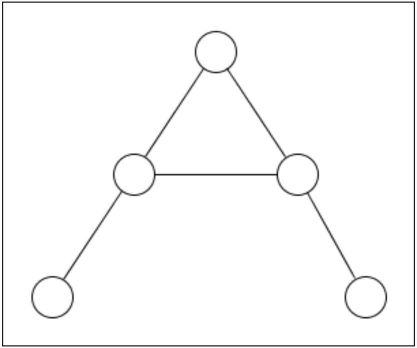


Figura 18: split-co-comparabilidade

Split-indiferença

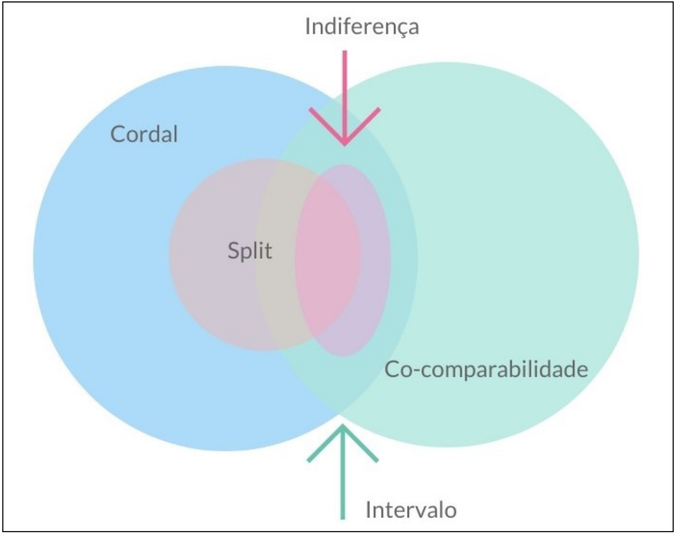


Figura 19: Relação entre classes

Grafo split-indiferença

- Ortiz et al. (1998) encontra uma caracterização dos split-indiferença e resolve o Problema da Coloração de Aresta para essa classe.

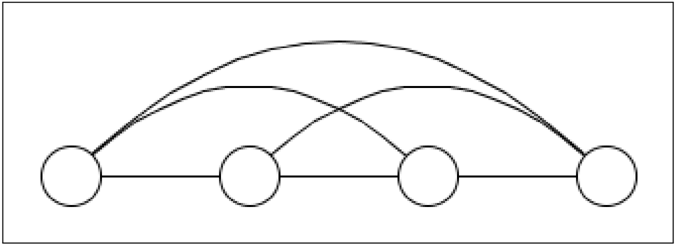


Figura 20: split-indiferença

Grafo split-indiferença

- Ortiz et al. (1998) encontra uma caracterização dos split-indiferença e resolve o Problema da Coloração de Aresta para essa classe.

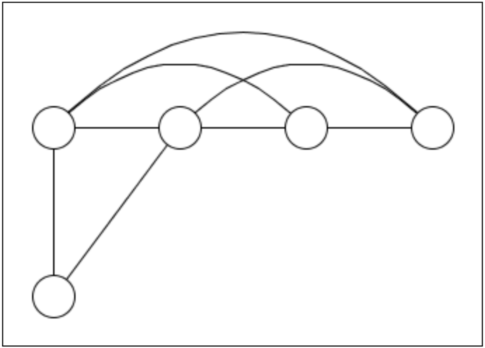


Figura 21: split-indiferença

Grafo split-indiferença

- Ortiz et al. (1998) encontra uma caracterização dos split-indiferença e resolve o Problema da Coloração de Aresta para essa classe.

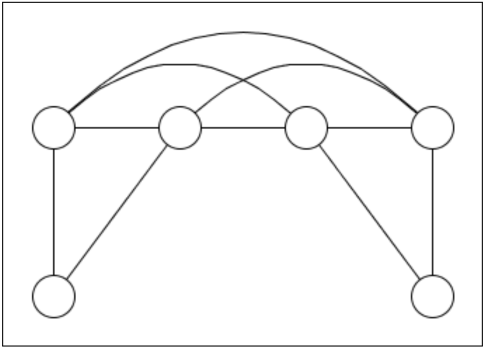


Figura 22: split-indiferença

Grafo split-indiferença

- Ortiz et al. (1998) encontra uma caracterização dos split-indiferença e resolve o Problema da Coloração de Aresta para essa classe.

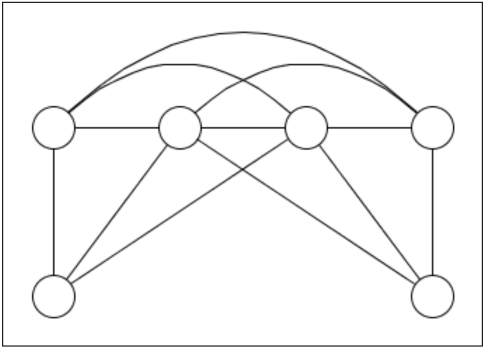
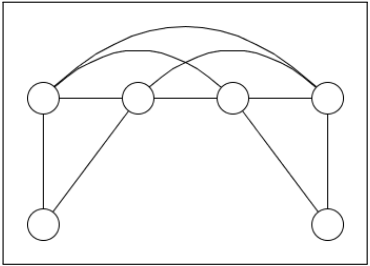


Figura 23: split-indiferença

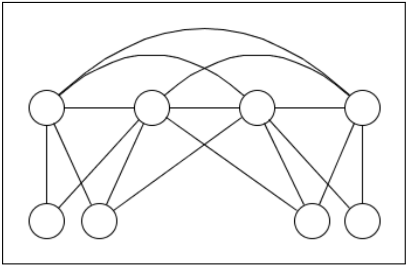
Conclusões dos casos em aberto das classes

- É possível dividir o conjunto independente de vértices dos split-co-comparabilidade em dois subconjuntos.
- Nos casos ainda não resolvidos nessa classe esses conjuntos devem ter mesmo tamanho.
- Existe uma contingência de vizinhança entre os vértices de ambos subconjuntos definidos, não necessariamente usando a mesma ordenação dos vértices da clique para ambos conjuntos.

Grafos split-indiferença e split-co-comparabilidade

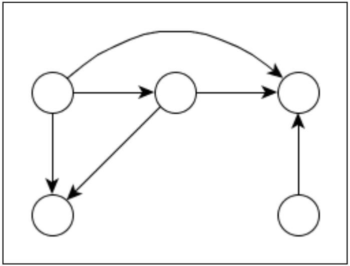


(a) split-indiferença

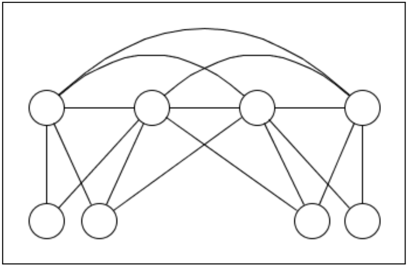


(b) split-co-comparabilidade

Grafos split-comparabilidade e split-co-comparabilidade



(a) split-comparabilidade



(b) split-co-comparabilidade

Estratégia

- Sabe-se que as classes dos split-comparabilidade, split-co-comparabilidade e split-indiferença possuem diversas similaridades.
- Muitos raciocínios usados nas demonstrações dessas classes podem ser repetidos em split-co-comparabilidade.
- Assim, pretende-se adaptar as técnicas de Ortiz et al. ou Cruz et al. nos grafos split-co-comparabilidade.

Coloração de Arestas em split-co-comparabilidade

Luis Gustavo da Soledade Gonzaga
sole.dade.lg@gmail.com
Orientadora: Profª. Drª. Sheila Morais de Almeida

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

19 de Setembro de 2019

Brandes, U., Gaertler, M. and Wagner, D., 2003, September. *Experiments on graph clustering algorithms.* In European Symposium on Algorithms (pp. 568-579). Springer, Berlin, Heidelberg.

Cai, L. e Ellis, J. A. (1991). Np-completeness of edge-colouring some restricted graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 30(1):15–27.

Cruz, J. B. d. S., da Silva, C. N., e de Almeida, S. M. (2017). The overfull conjecture onsplit-comparability graphs. *arXiv preprint arXiv:1710.03524.*

Holyer, I., 1981. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on computing*, 10(4), pp.718-720.

ORTIZ, Carmen; VILLANUEVA, Mónica. Threshold dimension of split-permutation graphs.Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, v. 75, p. 117,2010.

Vizing, V. G. (1964). On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Discret Analiz*, 3:25–30.

Z. Carmen Ortiz, Nelson Maculan, Jayme L, 1998. Szwarcfiter. Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs. *Discrete Applied Mathematics* 82(1–3), pp. 209-217.