Problema da Coloração Total Distinta na Vizinhança em Potências de Caminhos

Pedro Henrique Salgado
Mayara Midori Omai
Prof^{a}. Dra. Sheila Morais de Almeida

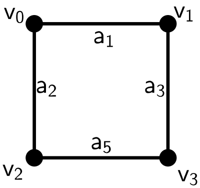
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

4 de outubro de 2017

Conceitos Básicos

Dois elementos de um grafo são adjacentes se:

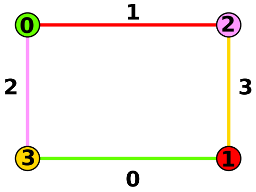
1. são um par de vértices que formam uma aresta.
2. são duas arestas que incidem no mesmo vértice.
3. são uma aresta e um dos vértices que a compõe.



Coloração total própria

Definição

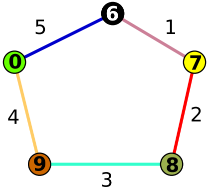
Uma coloração total própria consiste na atribuição de cores para as arestas e vértices de um grafo de forma que para elementos adjacentes sejam atribuídas cores distintas.



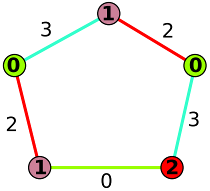
Problema da Coloração Total

Definição

Obter uma coloração total própria de um grafo utilizando o menor número possível de cores. Tal número é denominado *número cromático total* e é denotado por $\chi''(G)$.



$\chi''(G) = 10$

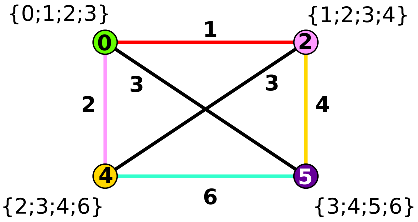


$\chi''(G) = 4$

Coloração total distinta na vizinhança

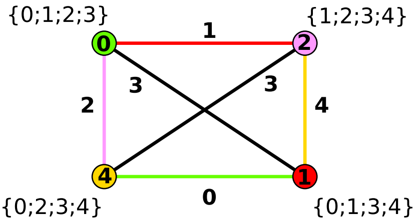
Definição

Uma coloração total distinta na vizinhança consiste em uma coloração total própria de um grafo de forma que vértices adjacentes tenham conjuntos de cores distintos.



Definição

Encontrar o menor número de cores possível para se obter uma coloração total distinta na vizinhança. Tal número é chamado de *número cromático total distinto na vizinhança* e é denotado por $\chi''_a(G)$.



$$\chi''_a(G) = 5$$

Resultados Conhecidos

Teorema (Zhang et al. 2005)

Se G é um grafo com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.

Teorema (Zhang et al. 2005)

Se K_n é um grafo completo com n vértices, então

$$\chi''_a(K_n) = \left(\begin{cases} \Delta(K_n) + 2, & \text{se n é par,} \\ \Delta(K_n) + 3, & \text{se n é ímpar} \end{cases} \right.$$

Resultados Conhecidos

Teorema (Zhang et al. 2005)

Se C_n é um ciclo com $n \geq 4$ vértices, então $\chi''_a(C_n) = 4$.

Teorema (Zhang et al. 2005)

Se T_n é uma árvore com $n \geq 2$. Então, $\chi''_a(T_n) = \Delta(T) + 2$ quando existem vértices adjacentes de grau máximo e $\chi''_a(T_n) = \Delta(T) + 1$, caso contrário.

Resultados Conhecidos

Teorema (Pedrotti e Mello, 2010)

Seja G um grafo indiferença com $\Delta(G)$ par e sem vértices adjacentes de grau máximo. Então, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 1$.

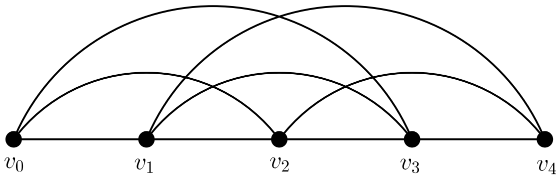
Teorema (Pedrotti e Mello, 2010)

Seja G um grafo indiferença com $\Delta(G)$ ímpar e com vértices adjacentes de grau máximo. Então, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

Potência de Caminho

Definição

P_n^k é a k-ésima potência de um caminho com n vértices P_n, onde existe uma aresta $v_i v_j$ somente se $|j - i| \leq k$.

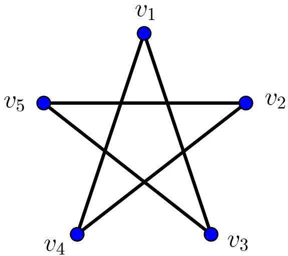


P_5^3

Definições necessárias

Vizinhança Aberta

Conjunto de vértices que são adjacentes a v e é denotado por $N(v)$.

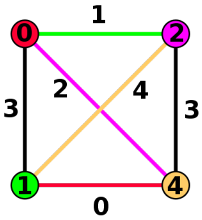


$$N(v_1) = \{v_3, v_4\}$$

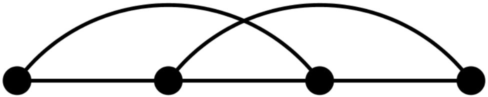
Definições necessárias

Pullback

Consiste em um função $f : V(H) \to V(G)$, de forma que se $ij \in E(G)$, então $f(i)f(j) \in E(G)$ e f é injetora quando restrita a $N(v)$.



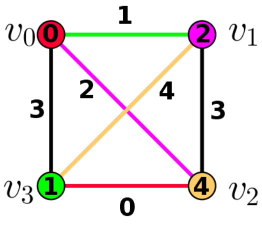
K_4



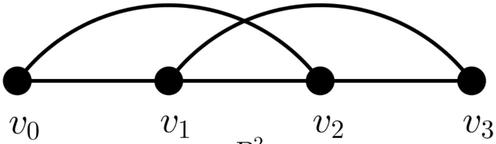
P_4^2

Pullback

Consiste em um função $f : V(H) \to V(G)$, de forma que se $ij \in E(G)$, então $f(i)f(j) \in E(G)$ e f é injetora quando restrita a $N(v)$.



K_4

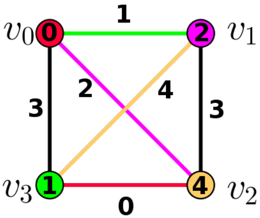


P_4^2

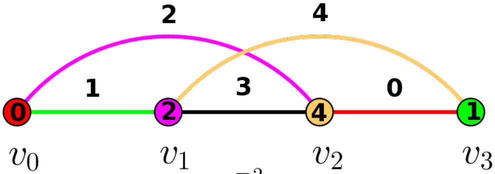
Definições necessárias

Pullback

Consiste em um função $f : V(H) \to V(G)$, de forma que se $ij \in E(G)$, então $f(i)f(j) \in E(G)$ e f é injetora quando restrita a $N(v)$.



K_4

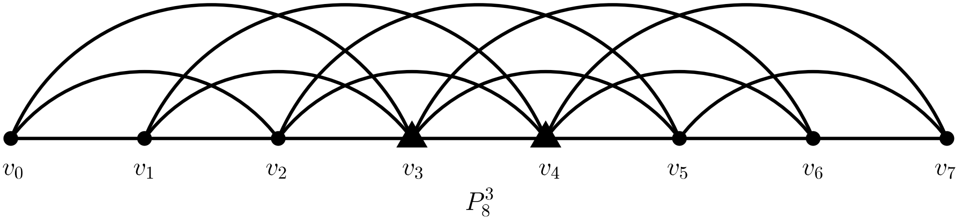


P_4^2

Resultados

Proposição

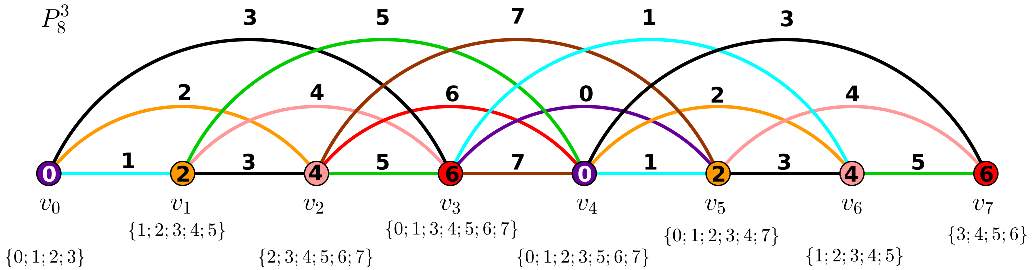
Se P_n^k é uma potência de caminho com $n \neq 2k+1$, então existem vértices adjacentes de grau máximo.



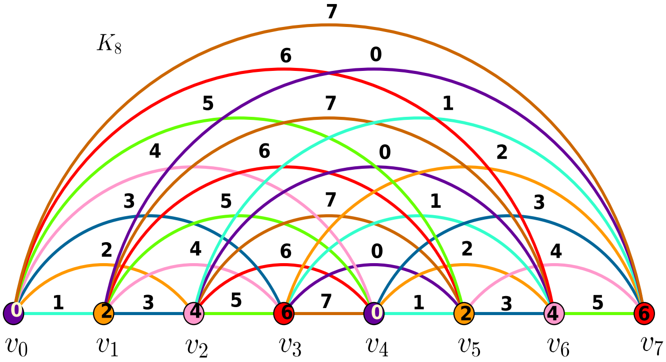
Resultados

Teorema

Seja P_n^k uma potência de caminho com $n > 2k+1$, então $\chi''_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 2$.



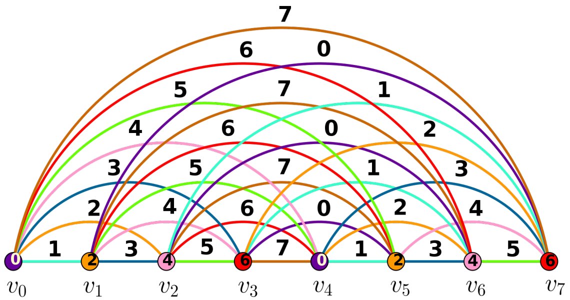
Exemplo

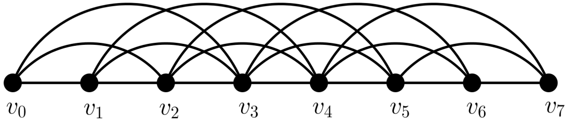


$$\tau(v_i) = 2i \pmod{\Delta(P_n^k) + 2}$$

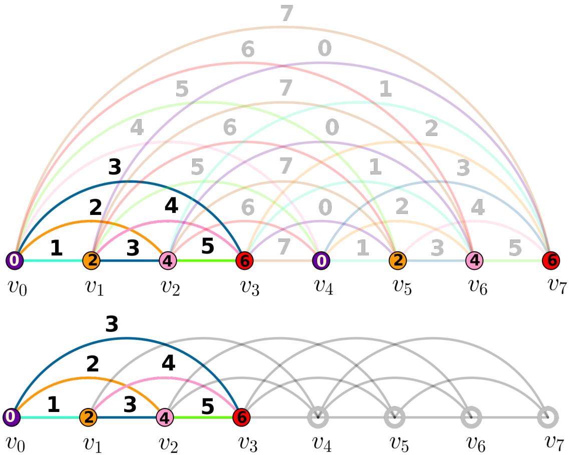
$$\tau(v_i v_j) = (i + j) \pmod{\Delta(P_n^k) + 2}$$

Exemplo

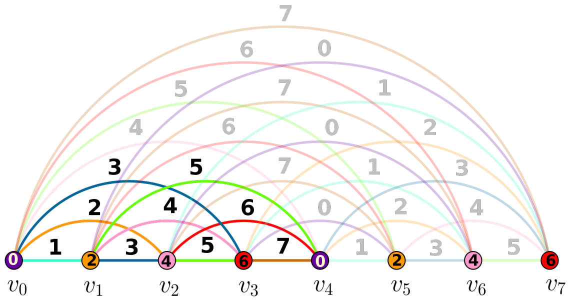




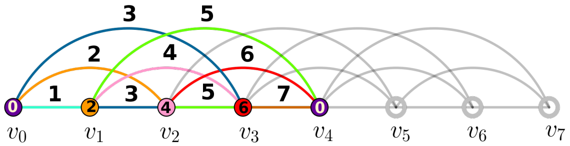
Exemplo



Exemplo

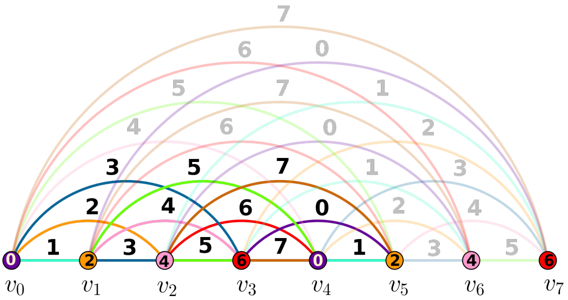


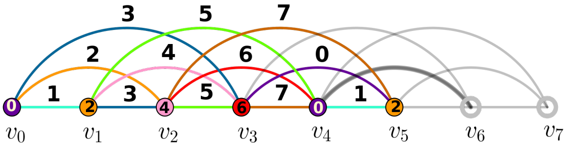
7
6
0
5
7
1
4
6
0
2
3
5
7
1
3
2
4
6
0
2
4
1
3
5
7
1
3
5
0
2
4
6
0
2
4
6
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7



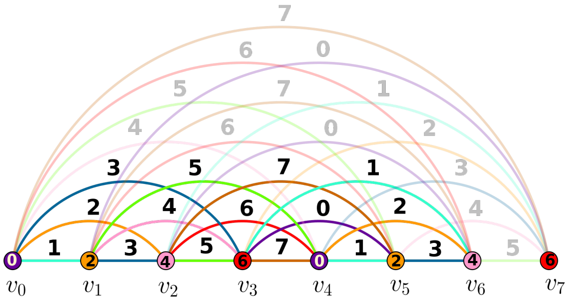
3
5
2
4
6
1
3
5
7
0
2
4
6
0
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7

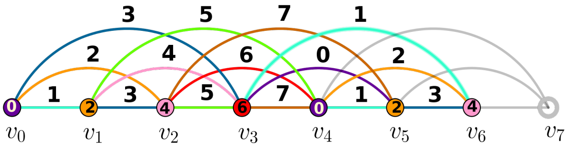
Exemplo



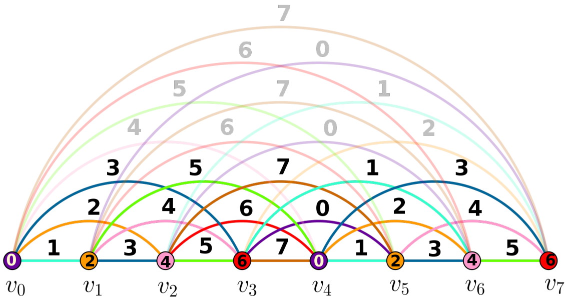


Exemplo

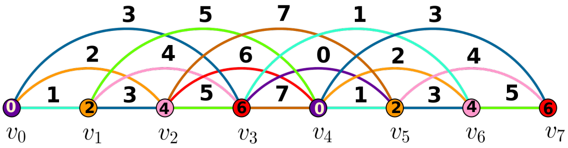




Exemplo

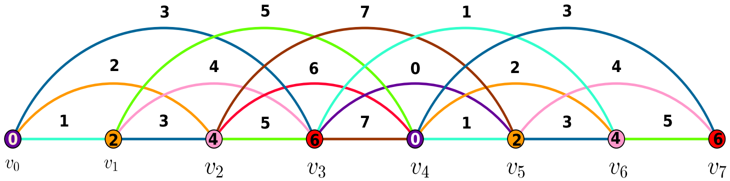


7
6
0
5
7
1
4
6
0
2
3
5
7
1
3
2
4
6
0
2
4
1
3
5
7
1
3
5
0
2
4
6
0
2
4
6
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7



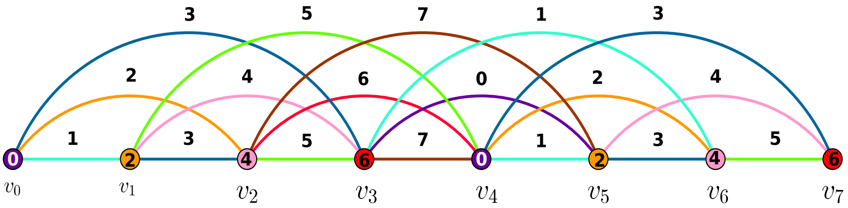
3
5
7
1
3
2
4
6
0
2
4
1
3
5
7
1
3
5
0
2
4
6
0
2
4
6
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7

Exemplo



$$2i - 2j \geq (\Delta(P_n^k) + 2)$$
$$2(i - j) \geq (2k + 2)$$
$$i - j \geq (k + 1)$$

Exemplo



$$c = (i + j + 1) \mod (\Delta(P_n^k) + 2)$$

Trabalhos Futuros

- Resolver os casos em que $k + 1 < n < 2k$ e n é ímpar.