Diversidade dos conjuntos independentes maximais em alguns grafos não-simpliciais

Aleffer Rocha
Profª. Drª. Sheila Morais de Almeida

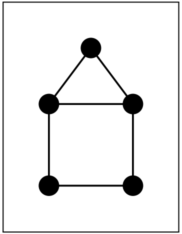
aleffer@alunos.utfpr.edu.br

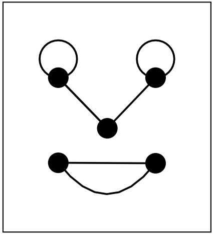
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

28 de setembro de 2016

Definição de um grafo

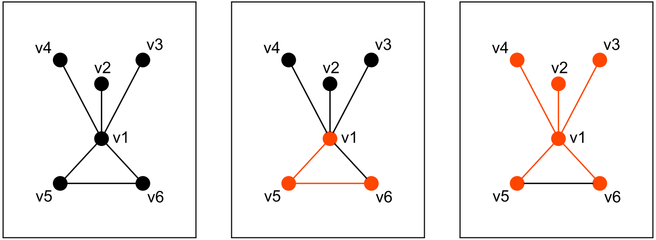
- Um conjunto $G = (V, E)$;
- Cada aresta tem um ou dois vértices associados a ela;
- Um grafo é denominado simples se o mesmo não possui laços ou arestas múltiplas.





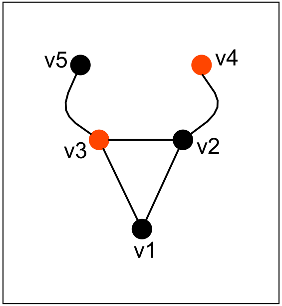
Vértices Adjacentes ou Vizinhos

Um vértice é adjacente ou vizinho a outro vértice se os mesmos são conectados/interligados por uma aresta.



Conjunto Independente

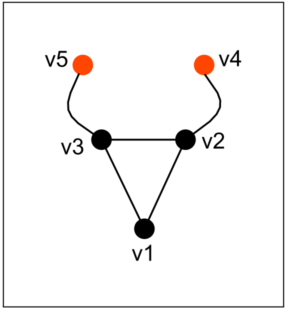
- Um conjunto independente em um grafo é um conjunto tal que, os vértices contidos nesse conjunto não são adjacentes.

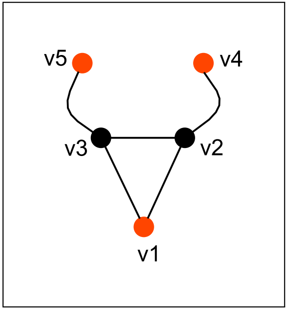


- Os vértices em laranjado são um conjunto independente;
- Os vértices em preto não são um conjunto independente.

Conjunto Independente Maximal

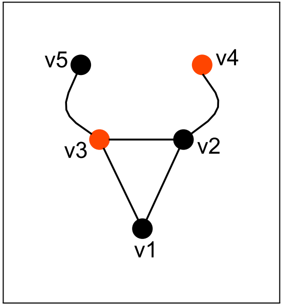
- Um conjunto independente é maximal se não há como adicionar mais vértices neste conjunto.

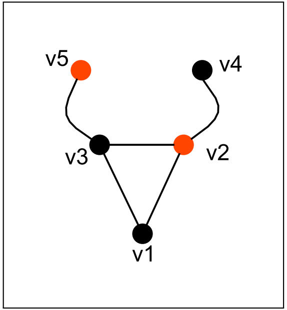


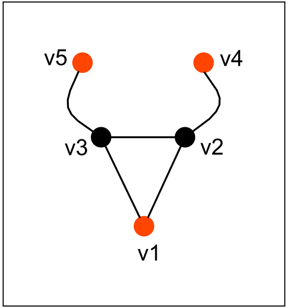


Problema

- Quantos conjuntos independentes maximais existem em um grafo?

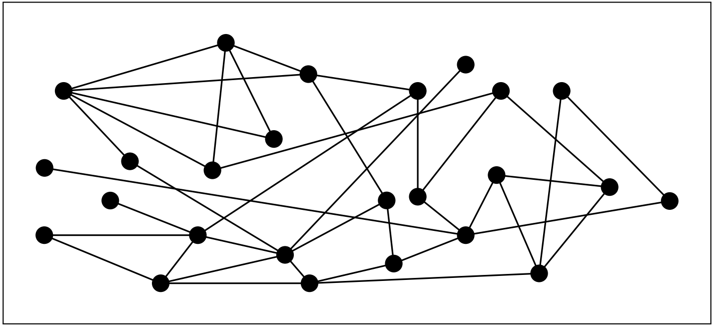






Problema

- Quantos conjuntos independentes maximais existem em um grafo?

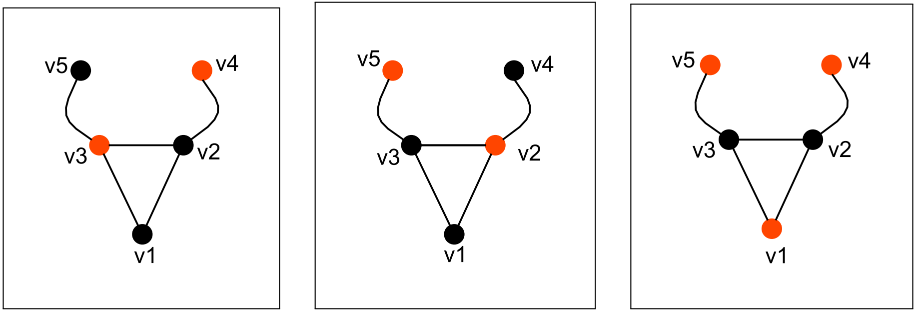


Problema

- Se o grafo possui três conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes então dizemos que pertence ao $M(3)$;
- Se o grafo pertence ao $M(5)$, então tem 5 conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes;
- Logo, se um grafo possui t conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes, então dizemos que o grafo pertence ao $M(t)$.

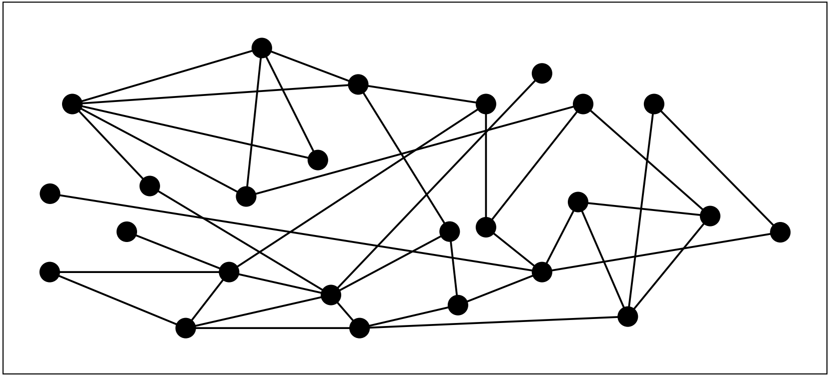
Problema

- O grafo touro, por exemplo, pertence ao $M(2)$.



Problema

- Mas e um grafo grande? Pertence a qual valor de $M(t)$?

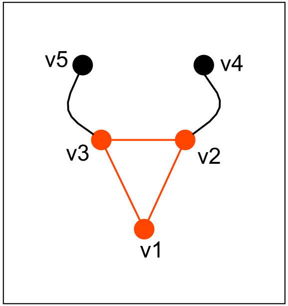


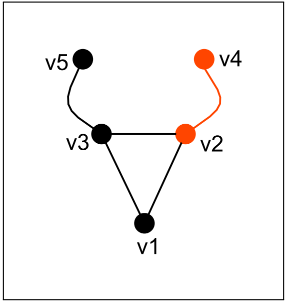
Problema

- Não se conhece algoritmo eficiente;
- Sabe-se que é possível resolver este problema para alguns grafos simpliciais;
- Para conhecermos os grafos simpliciais, precisamos conhecer as cliques.

Clique de um Grafo

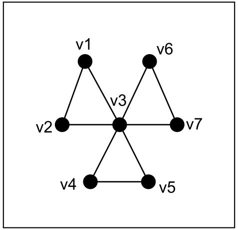
- Uma clique de um grafo G é um conjunto de vértices todos vizinhos entre si.





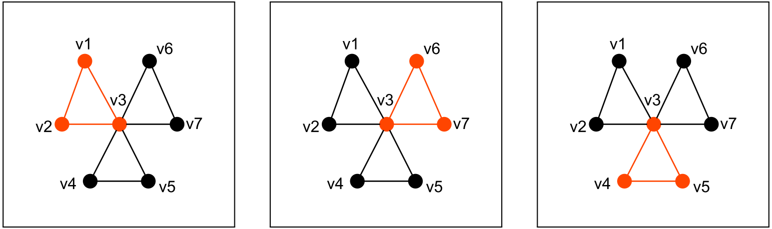
Grafo Simplicial

- Um grafo é simplicial se e somente se os seus vértices são simpliciais ou vizinhos de um vértice simplicial.



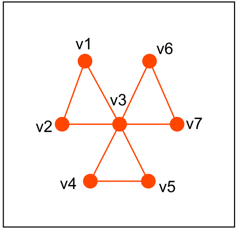
Grafo Simplicial

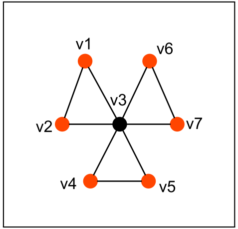
- Um vértice é simplicial se e somente se ele e seus vizinhos formam uma clique.



Grafo Simplicial

- Barbosa e Hartnell (1998)[1] mostram quais os grafos simpliciais que pertencem a $M(2)$.



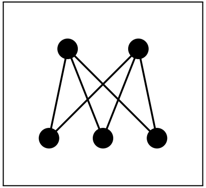


[1] Some problems based on the relative sizes of the maximal independent sets in a graph

Resultados

Teorema

O grafo $K_{m,n} \in M(2)$ se, e somente se, $m \neq n$, caso contrário, $K_{m,n} \in M(1)$.

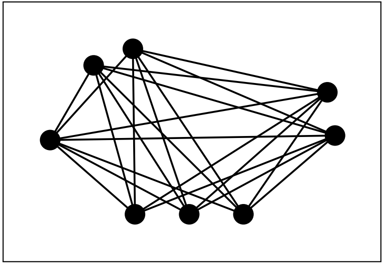


Um grafo é bipartido completo se seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes distintos tal que cada vértice em um conjunto é adjacente a todos os outros vértices do outro conjunto.

Resultados

Teorema

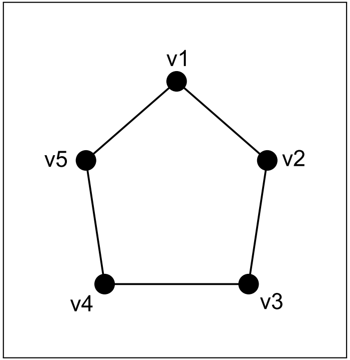
Se G é um grafo k-partido completo com partição $\mathcal{F} = [A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}]$, então $G \in M(\Upsilon(\mathcal{F}))$.

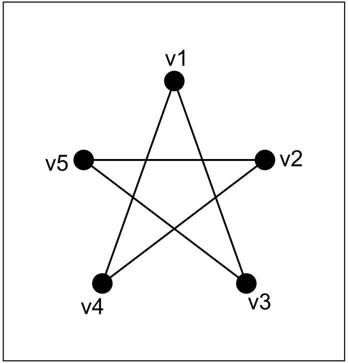


Um grafo é k-partido completo se seus vértices podem ser particionados em k conjuntos independentes distintos tal que cada vértice em um conjunto é adjacente a todos os outros vértices dos demais conjuntos, assim sucessivamente.

Complemento de um Grafo

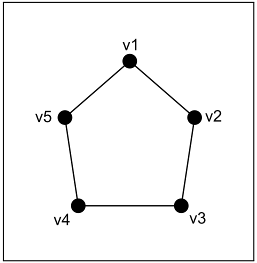
O complemento de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, composto por todos os vértices de G, os quais são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se não são adjacentes em G.

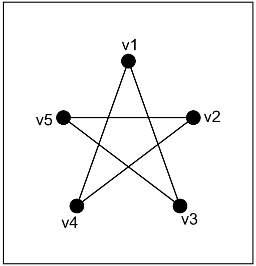


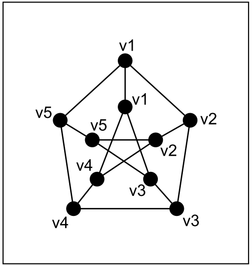


Prisma Complementar

- Denotado por $G\overline{G}$;
- G é o grafo original e $\overline{G}$ seu complemento;
- $G\overline{G} = G \cup \overline{G}$ tal que os vértices correspondentes aos dois grafos são adjacentes.



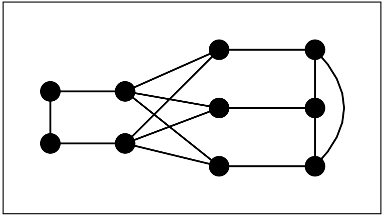




Resultados

Teorema

O grafo $K_{m,n}\overline{K_{m,n}} \in M(2)$ se, e somente se, $m \neq n$, caso contrário, $K_{m,n}\overline{K_{m,n}} \in M(1)$.



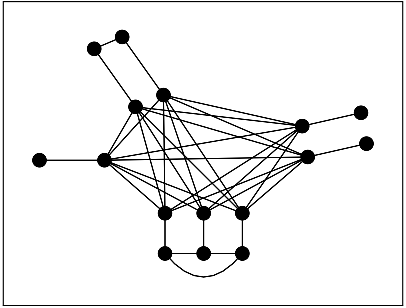
Diversidade

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos, chamamos de diversidade de $\mathcal{F}$ a quantidade de cardinalidades diferentes dos conjuntos independentes de $\mathcal{F}$

Resultados

Teorema

Seja G o prisma complementar de $K_{[n_0,n_1,\ldots,n_{k-1}]}$. Então $G \in M(\Upsilon(\mathcal{F}))$, onde $\mathcal{F} = \{n_0, n_1, \ldots, n_{y-1}\}$.



Noção de Prova

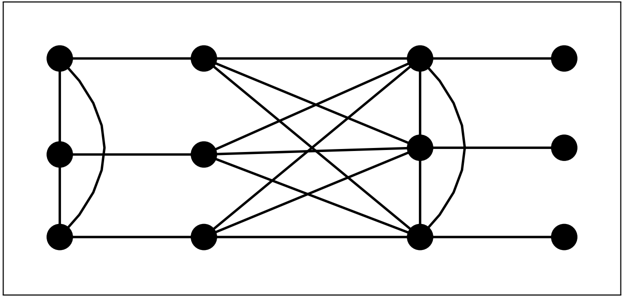
Teorema

Se $G\overline{G}$ é prisma complementar de um grafo split completo $G = [Q, S]$, então $G\overline{G} \in M(2)$ quando $|S| > 1$ e $G\overline{G} \in M(1)$, caso contrário.

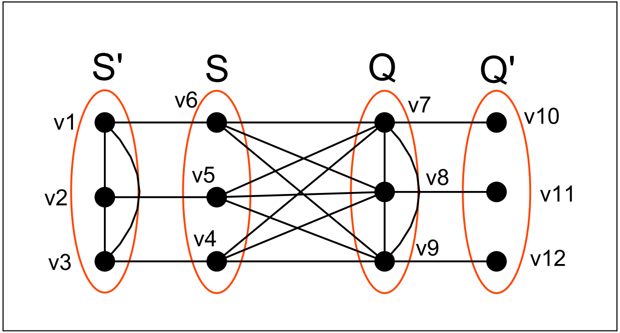
- Um grafo é split se pode ser particionado em dois conjuntos, sendo um uma clique e outro um conjunto independente;
- Um grafo é split completo se todos os vértices da clique são adjacentes aos vértices do conjunto independente.

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Noção de Prova

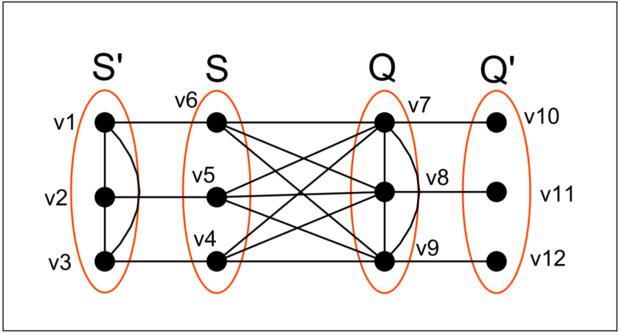


Noção de Prova



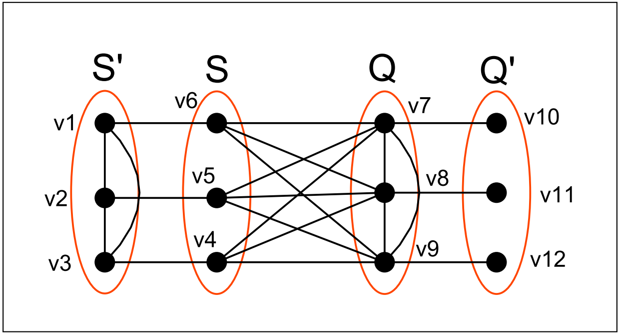
- Nenhum vértice de Q ou $S' \in I$;

Noção de Prova



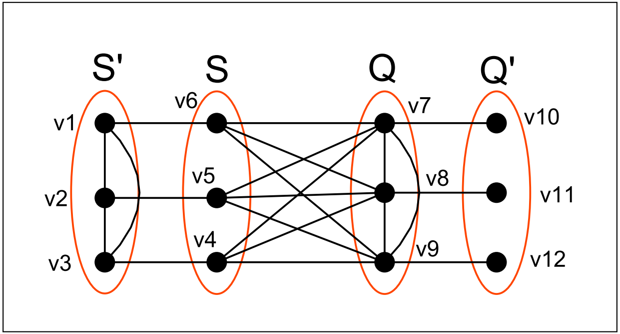
- Nenhum vértice de Q ou $S' \in I$;
- Algum vértice de $Q \in I$;

Noção de Prova



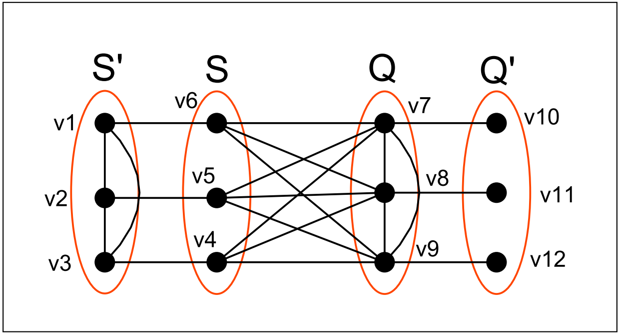
- Algum vértice de $S' \in I$

Noção de Prova



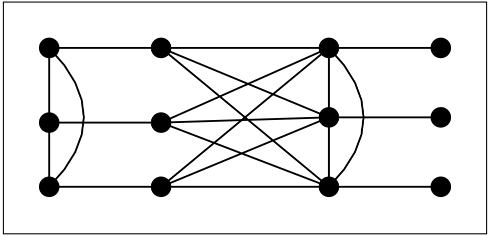
- Algum vértice de $S' \in I$
    - Com vértice S;

Noção de Prova



- Algum vértice de $S' \in I$
  - Com vértice S;
  - Sem vértice de S.

Noção de Prova



- $G\overline{G}$ possui dois possíveis tamanhos de conjuntos independentes maximais: $|Q| + |S|$ e $|Q| + 1$. Logo, quando $|S| > 1$, $G\overline{G} \in M(2)$ e, caso contrário, $G\overline{G} \in M(1)$. $\square$

Agradecimentos

- Obrigado!