Coloração de Arestas em Grafos Indiferença

Rafael Porto[1,2], Sheila M. Almeida[1,3]

Introdução

Uma *coloração de arestas (própria)* é uma atribuição de cores para as arestas de um grafo tal que arestas que incidem no mesmo vértice têm cores distintas. A Figura 1 é um exemplo de coloração de arestas própria.

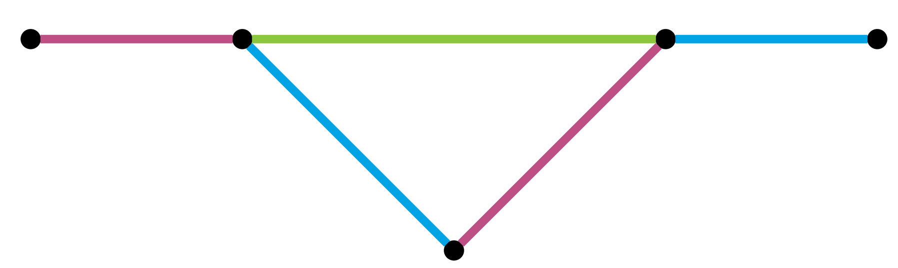


Figura 1: Coloração de arestas para o grafo Touro

Problema da Coloração de Arestas

O menor número de cores para uma coloração de arestas própria de um grafo G é o índice cromático de G, $\chi'(G)$. O Problema da Coloração de Arestas é determinar o índice cromático de um dado grafo.

Resultados Conhecidos

Por definição, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, onde $\Delta(G)$ O grau máximo de um grafo G.

Teorema 1 (Vizing, 1964)
Existe um algoritmo polinomial para colorir as arestas de qualquer grafo simples G com $\Delta(G) + 1$ cores.

Então, existem apenas dois valores possível para $\chi'(G)$.

Definição
- *G é classe 1:* $\chi'(G) = \Delta(G)$;
- *G é classe 2:* $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Decidir se G é classe 1 é um problema NP-completo, conhecido como Problema da Classificação (Holyer, 1981).

Grafos de Intervalos

Um grafo de intervalos é um grafo G tal que cada vértice de G representa um intervalo de uma família de intervalos da reta real e dois vértices são adjacentes se e somente se seus respectivos intervalos se intersectam. Um exemplo é apresentado na Figura 2.

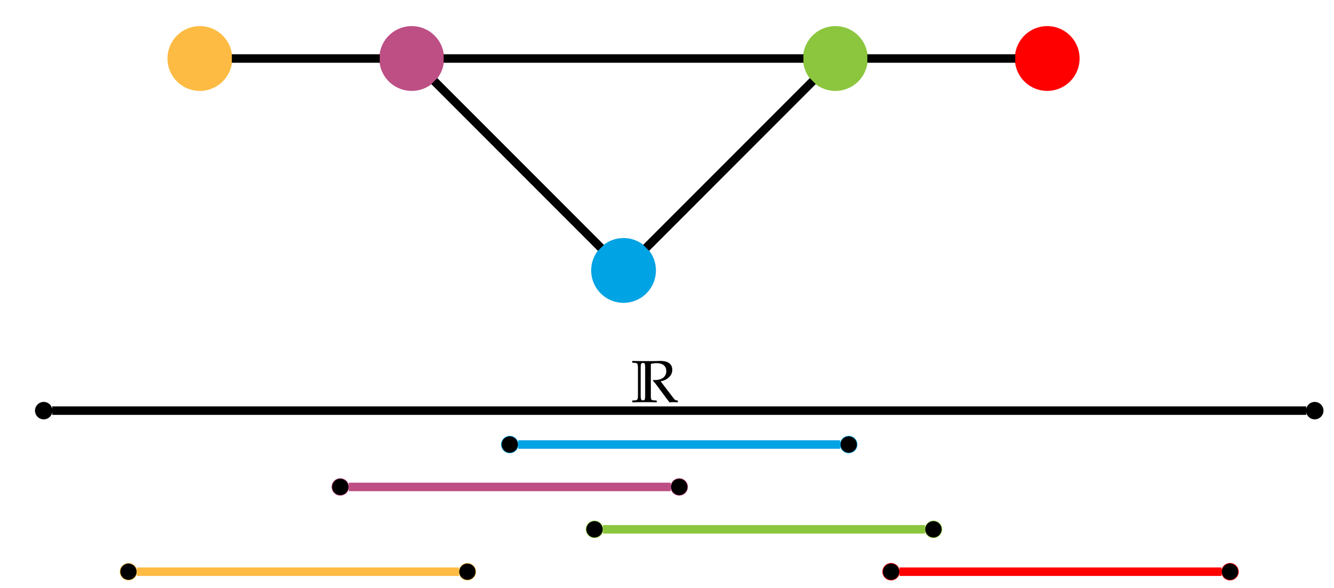
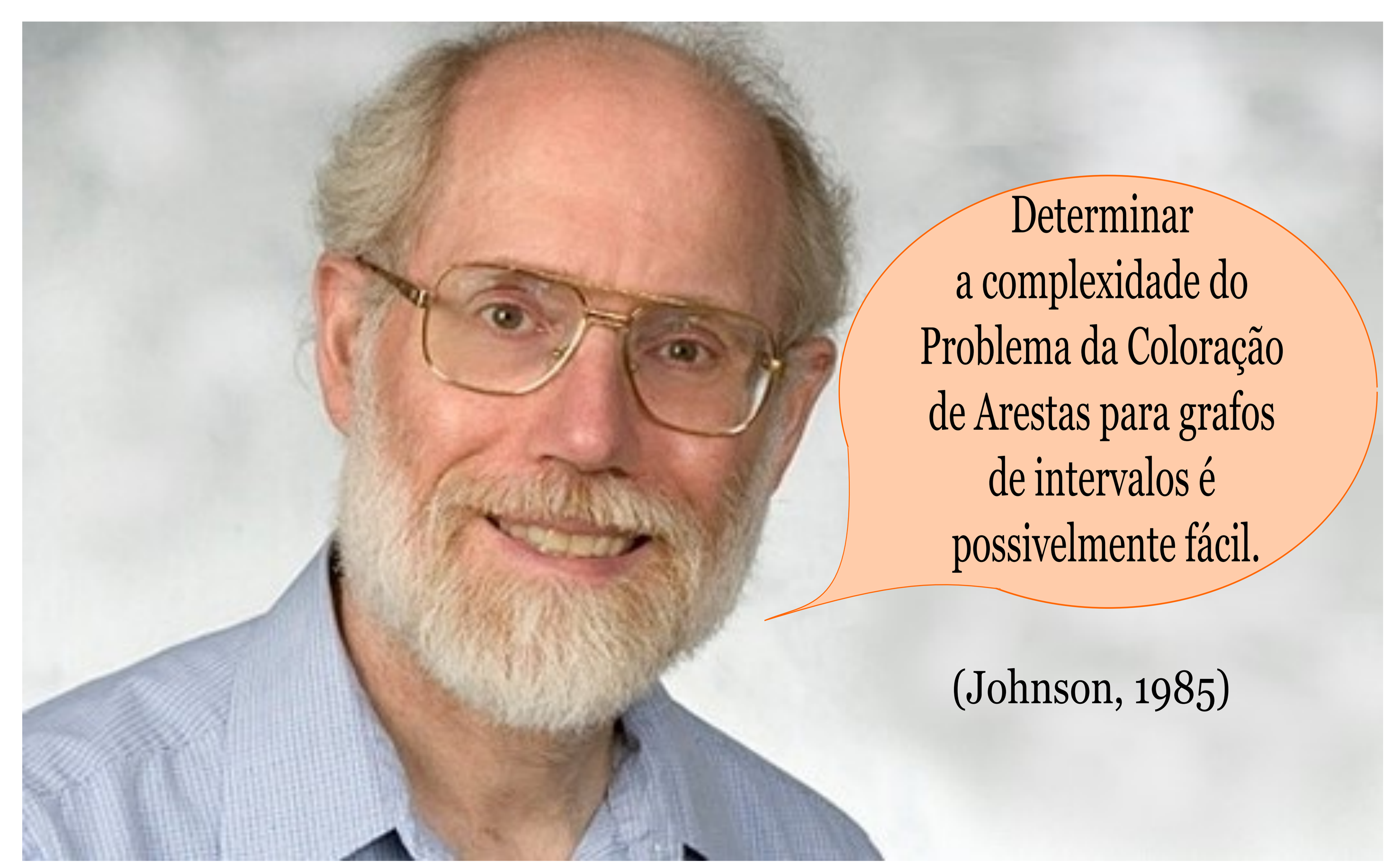


Figura 2: Grafo Touro e sua representação por intervalos



Fonte: adaptação de dl.acm.org

Teorema 2 (Figueiredo et al., 1999)
Se G é grafo de intervalos com $\Delta(G)$ ímpar, então G é Classe 1.

Uma coloração de arestas para um grafo de intervalos G com $\Delta(G)$ ímpar é apresentada na Figura 1.

Grafos Indiferença

Um grafo é indiferença se representa uma família de intervalos em que todos têm o mesmo tamanho. O grafo Touro (Figura 2) é um grafo indiferença. O Problema da Coloração de Arestas permanece em aberto mesmo quando restrito aos grafos indiferença.

Denotamos por $d(N(v))$ a soma dos graus dos vértices que são adjacentes a v em G. Seja Ψ a classe dos grafos G tais que todo $\Delta(G)$-vértice v satisfaz $d(N(v)) \leq \Delta(G)^2 - \Delta(G)$. Observe, por exemplo, que o grafo da Figura 3 pertence à Classe Ψ.

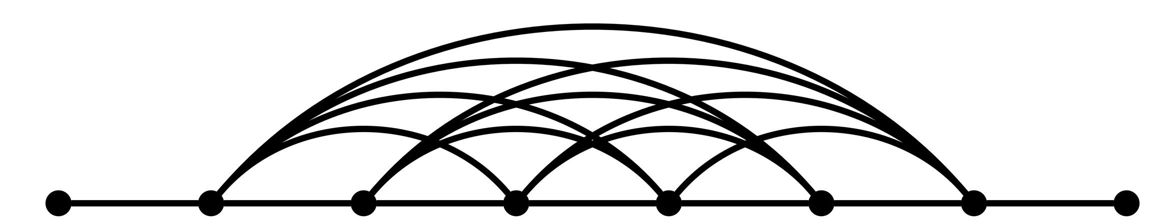


Figura 3: Grafo Indiferença

Teorema 3 (Zatesko et al., 2020)
Todo grafo que pertence a Ψ é Classe 1.

Problema
Caracterizar os grafos indiferença que pertencem a Ψ.

Referências

Figueiredo, C. M. H., J. Meidanis, e C. P. de Mello. 1999. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information Processing Letters* 70:147–152.

Holyer, I. 1981. The np-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing* 10:718–720.

Vizing, V. G. 1964. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret Analiz* 3:25–30.

Zatesko, L.M., A. Zorzi, R. Carmo, e A.L.P. Guedes. 2020. Edge-colouring graphs with bounded local degree sums. *Discrete Applied Mathematics* 281:268–283.

Projeto financiado pelo CNPq (428941/2016-8).

[1]Universidade Tecnológica Federal do Paraná;
[2]rafael.1997@alunos.utfpr.edu.br; [3]sheilaalmeida@utfpr.edu.br