Reconhecimento de grafos IIC-comparabilidade

Lucas Ferreira Glir, André L. P. Guedes
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
E-mails: lfglir@inf.ufpr.br, andre@inf.ufpr.br

WPCCG 2021

Resumo

Os grafos IIC-comparabilidade são uma classe de grafos recente, proposta por Groshaus e Guedes (2021), e ainda não possui algoritmo de reconhecimento de tempo polinomial conhecido. Através do estudo de algoritmos de reconhecimento de grafos de comparabilidade, sobretudo os de decomposição modular, esperamos desenvolver um algoritmo que faça isso em tempo polinomial.

Introdução

Os grafos IIC-comparabilidade foram definidos por Groshaus e Guedes como parte da caracterização de grafos biclique de grafos bipartidos [Groshaus and Guedes, 2021]. Tal caracterização diz que a classe dos grafos biclique de grafos bipartidos é igual a classe dos grafos quadrado de grafos IIC-comparabilidade. Ou seja, $KB(\text{bipartidos}) = (\text{IIC-comparabilidade})^2$. Entretanto, reconhecer grafos IIC-comparabilidade ainda tem complexidade desconhecida. O mesmo vale para seus quadrados.

Neste trabalho estamos estudando o reconhecimento dos grafos IIC-comparabilidade buscando um algoritmo de tempo polinomial.

Grafos de Comparabilidade

Dado um conjunto parcialmente ordenado(poset) $P = (C, \leq)$, o grafo de comparabilidade de P [Gilmore and Hoffman, 1964] é o grafo $G_p = (C, E)$ tal que $uv \in E$ se e somente se $u \leq v$ ou $v \leq u$. Um grafo G é um grafo de comparabilidade se existe um poset P tal que $G \simeq G_p$. Dizemos que P é um modelo de comparabilidade de G. Essa classe de grafos é hereditária.

Grafos IIC-comparabilidade

Dado um poset $P = (C, \leq)$ e $x \in C$, $I_p^-(x) = \{y \in C | y \leq x\}$ e $I_p^+(x) = \{y \in C | x \leq y\}$ são, respectivamente, o *intervalo de predecessores* e o *intervalo de sucessores* de x em P. Dizemos que um poset $P = (C, \leq)$ é *fechado sob interseção de intervalos (IIC)* se os conjuntos $\mathcal{I}_p^- = \{I_p^-(x) | x \in C\}$ e $\mathcal{I}_p^+ = \{I_p^+(x) | x \in C\}$ são *fechados sob interseção*. Um grafo G é IIC-comparabilidade se existe um poset IIC P tal que G e G_p são isomorfos.

Um grafo de comparabilidade que não possui C_4 como subgrafo induzido, é IIC-comparabilidade [Groshaus and Guedes, 2021]. Caso contrário, todo C_4 induzido em um grafo IIC-comparabilidade está em um 4-roda induzido.

Existir uma 4-roda não é condição suficiente para que um grafo de comparabilidade seja IIC-comparabilidade. Como os grafos de comparabilidade representam posets, a orientação dos arcos do 4-roda influênciam quais são os conjuntos I_p^- e I_p^+. Se os arcos do 4-roda apontam para o vértice interno, está na verdade indicando que o vértice interno é sucessor dos vértices do C_4. Nesse caso, o 4-roda não tem mínimo. Se os arcos do 4-roda apontam para o C_4, indica que o vértice interno é predecessor dos vértices do C_4. Nesse caso, o 4-roda não tem máximo. Se dois arcos apontam para o C_4 e dois apontam para o vértice interno, o grafo é IIC.

Seja R* os grafos que são 4-rodas com um vértice adicional adjacente ao vértice central sem ser adjacente a pelo menos dois vértices consecutivos do C_4. Há apenas duas maneiras de se orientar um R*: com todas as arestas ligadas ao vértice central entrem ou saiam dele.

As figuras 1 e 3 mostram, respectivamente, como devemos ordenar as arestas em um 4-roda e porque o R* não pode ser IIC-comparabilidade.

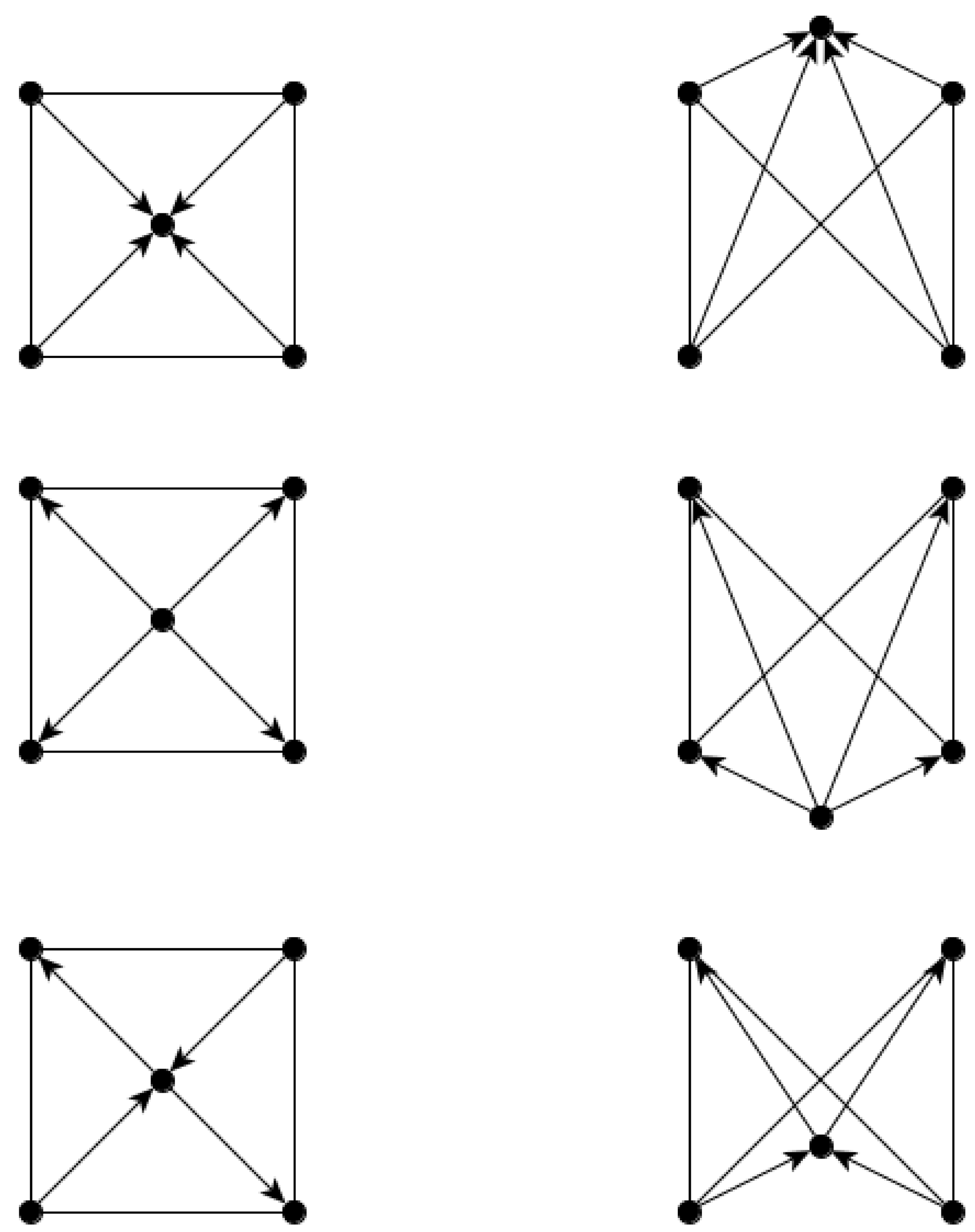

Figura 1: Esquema de como a orientação das arestas se comportam em um poset.

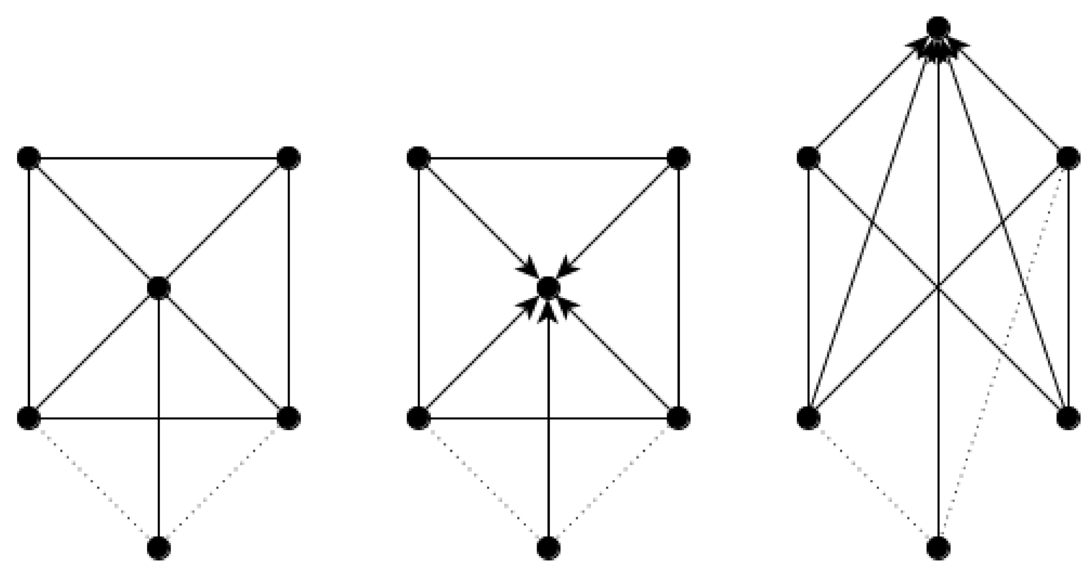

Figura 2: R*, orientação do R* com os arcos apontando para o vértice central e como isso força o grafo a não ter mínimo. As arestas tracejadas podem ou não existir.

Orientação Transitiva

Golumbic apresentou um algoritmo de reconhecimento de grafos de comparabilidade [Golumbic, 1977]. Neste algoritmo é usada uma relação entre as arestas do grafo, e as classes de equivalência do fecho transitivo desta relação.

Sendo $G = (V, E)$ um grafo não direcionado, definimos $A = \{ab \mid \{a, b\} \in E\}$. Note que se $\{a, b\} \in E$ então ab e ba estão em A. Os elementos do conjunto A são as possíveis orientações das arestas de G.

Seja a relação binária Γ em A como: $ab \; \Gamma \; a'b'$ se e somente se $a = a', bb' \notin A$ ou $b = b', aa' \notin A$. Se $ab \; \Gamma \; a'b'$ então, se a orientação ab for escolhida, então a orientação $a'b'$ também é.

O algoritmo de Golumbic orienta uma aresta do grafo, ab, encontra a classe de equivalência de ab em Γ^* (o fecho transitivo de Γ), e orienta todas as arestas de acordo com esta classe de equivalência. Em seguida, remove do grafo todas as arestas já orientadas e repete o processo.

Decomposição Modular

Um módulo M é um conjunto de vértices de G no qual cada vértice $m \in M$ possui a mesma vizinhança fora de M. Um *módulo forte* é um módulo que não possui interseção com outros módulos do grafo.

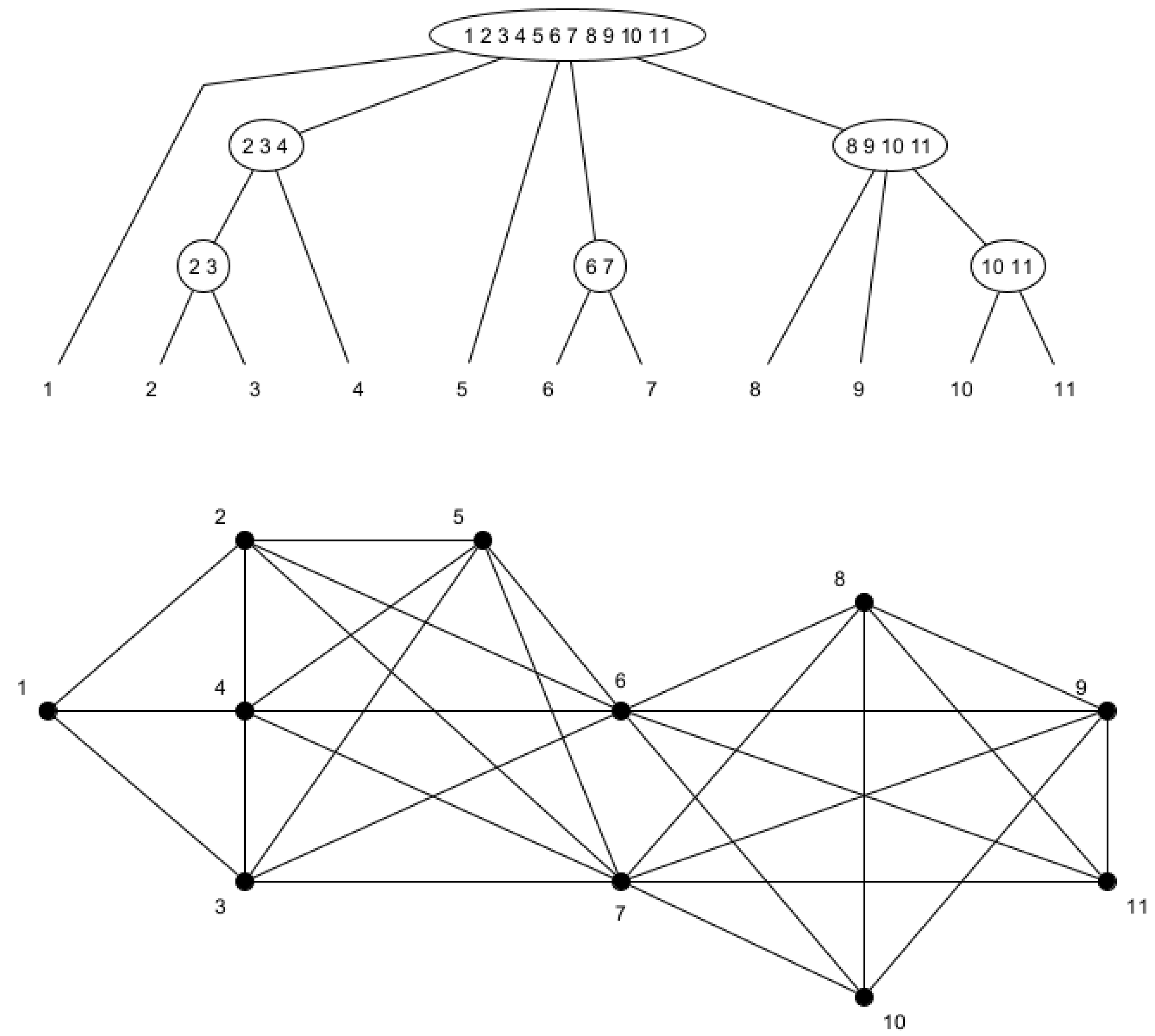

Figura 3: Exemplo de decomposição modular (Fonte [Habib and Paul, 2010]).

Reconhecimento

Nosso objetivo é estudar o problema de reconhecimento de grafos IIC-comparabilidade. Esperamos que através do estudo de algoritmos de reconhecimento de grafos de comparabilidade sejamos capazes de fazer isso.

Suspeitamos que um algoritmo de reconhecimento para grafos de comparabilidade IIC possa ser formulado a partir das técnicas desenvolvidas para reconhecimento de grafos de comparabilidade. Os algoritmos formulados a partir de decomposição modular parecem ser candidatos interessantes, pois a decomposição modular parece ser capaz de testar se um C_4 induzido no grafo está em uma 4-roda e, também, parece capaz de orientar esse 4-roda da maneira correta para ser IIC-comparabilidade.

Referências

[Gilmore and Hoffman, 1964] Gilmore, P. C. and Hoffman, A. J. (1964). A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 16:539–548.

[Golumbic, 1977] Golumbic, M. C. (1977). The complexity of comparability graph recognition and coloring. *Computing*, 18(3):199–208.

[Groshaus and Guedes, 2021] Groshaus, M. and Guedes, A. L. P. (2021). Biclique graphs of k3-free graphs and bipartite graphs. In *XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*, pages 213–220, São Paulo - online.

[Habib and Paul, 2010] Habib, M. and Paul, C. (2010). A survey of the algorithmic aspects of modular decomposition. *Computer Science Review*, 4(1):41–59.